Randeigenschaften eigentlicher holomorpher Abbildungen

Vasco Tomé Estevao Osório

1962

Randeigenschaften eigentlicher holomorpher Abbildungen

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde der
Hohen Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Ludwig-Maximilians-Universität zu München

vorgelegt von

Vasco Tomé Estevao Osório
aus Goa

München, Juni 1961

A. Schubert, München 5, Cornelliusstraße 21 · Telefon 221777

Berichterstatter: Professor Dr. K. Stein

Tag der mündlichen Prüfung: 31. Januar 1962

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Einleitung	1
§ 1 Eigentliche Abbildungen	5
§ 2 Holomorphe Abbildungen	7
§ 3 Randbedingungen für die Existenz eigentlicher holomorpher Abbildungen	15
§ 4 Faktorisierung eigentlicher holomorpher Abbildungen	21
§ 5 Eigentliche Zylindergebiete . .	27
§ 6 Über die Existenz analytischer Mengen auf dem Rand der homogenen beschränkten Gebiete im C^n . . .	31
Literaturverzeichnis	42

Inhaltsverzeichnis

Seite

Einleitung 1

§ 1 Regelmäßige Abbildungen 5

§ 2 Holomorphe Abbildungen 7

§ 3 Randbedingungen für die Existenz
eigentlicher holomorpher Abbil-
dungen 15

§ 4 Faktorisierung eigentlicher holo-
morpher Abbildungen 21

§ 5 Eigentliche Zylinderpolate . . 27

§ 6 Über die Existenz endlicher
Mengen auf dem Rand der Normalen
beschränkten Gebiete 31

Literaturverzeichnis 42

Einleitung

Wie seit langem bekannt ist, läßt sich die Theorie der biholomorphen Abbildungen (konformen Abbildungen) in der komplexen Ebene oder auf Riemann'schen Flächen nicht auf höher-dimensionale komplexe Räume übertragen. Im Gegensatz zu dem Riemannschen Abbildungssatz hatte Poincaré schon 1907 bewiesen, daß es unmöglich ist, einen Dizylinder des C^2 biholomorph auf eine Hyperkugel abzubilden.

In der modernen Funktionentheorie und speziell in der Theorie der komplexen Räume spielen die eigentlichen holomorphen Abbildungen eine bedeutende Rolle. Die Klasse solcher Abbildungen, welche die biholomorphen Abbildungen umfaßt, ist kürzlich von R.Remmert und K.Stein untersucht worden. Es ist ihnen gelungen, zu zeigen, daß es auch keine eigentliche holomorphe Abbildung gibt, die einen Dizylinder des C^2 in eine Hyperkugel, gleich welcher Dimension, abbildet. Dieses Resultat folgt aus der Tatsache, daß auf dem Rand einer Hyperkugel des C^n keine positivdimensionale lokalanalytische Mengen des C^n liegen.

In dieser Arbeit setzen wir die Untersuchungen von R.Remmert und K.Stein fort, soweit sie die Randeigenschaften der eigentlichen holomorphen Abbildungen betreffen.

Wir beweisen in Paragraph 2 folgende Verallgemeinerung des oben erwähnten Satzes von Remmert-Stein:

"Es seien $X_\lambda \subset C^{n_\lambda}$ Gebiete mit maximalen Dimensionen auf dem Rand, d.h. ∂X_λ besitze die topologische Dimension $2n_\lambda-1$ ($\lambda=1,2$). Ist dann $\tau : X_1 \times X_2 \to X'$ eine eigentliche holomorphe

Abbildung in ein beschränktes Gebiet X' des $C^{n'}$, so enthält $\partial X'$ lokalanalytische Mengen des $C^{n'}$ mit einer Dimension $\geq \max(n_1,n_2)$." (Vgl. Satz 1)

Der Satz behält seine Gültigkeit auch unter schwächeren Voraussetzungen: Es genügt die Eigentlichkeit der Abbildung in "genügend vielen" Randpunkten, genauer in einer Randmenge, die wir in der Folge als Radó'sche Menge bezeichnen.

Andererseits läßt sich der Satz auf direkte Produkte von Gebieten in beliebigen normalen komplexen Räumen übertragen, jedoch wird die Angabe der Dimension der lokalanalytischen Mengen, die in $\partial X'$ liegen müssen, etwas abgeschwächt.

Wir befreien uns schließlich von Zylindergebieten und beweisen einen ähnlichen Satz für eigentliche Abbildungen von Gebieten, die genau wie die Zylindergebiete gewisse Abbildungen auf niederdimensionale Räume gestatten. (Vgl. Satz 2)

Eng verbunden mit der Frage der Abbildbarkeit des Dizylinders in Hyperkugeln ist das Problem der Faktorisierung von Abbildungen zwischen Zylindergebieten. H.Cartan hat hinreichende Bedingungen für die Faktorisierung biholomorpher Abbildungen direkter Produkte von beschränkten Gebieten in Zahlenräumen angegeben. Remmert und Stein haben in der oben zitierten Arbeit bewiesen, daß jede eigentliche holomorphe Abbildung zwischen Dizylindern sich als kartesisches Produkt von zwei eigentlichen holomorphen Abbildungen faktorisieren läßt.

In der vorliegenden Arbeit beweisen wir eine allgemeine Aussage: "Es sei X direktes Produkt von Gebieten X_λ $(\lambda = 1,\ldots,s)$ in beliebigen normalen komplexen Räumen mit maximalen Dimensionen auf den Rändern, und X' direktes Produkt von be-

schränkten Gebieten X'_μ $(\mu = 1,\ldots,s')$ der Zahlenräume $C^{n'_\mu}$ mit einfachen Rändern, d.h. $\partial X'_\mu$ enthält keine lokalanalytische Menge des $C^{n'_\mu}$ mit positiver Dimension.

Ist dann $\tau : X \to X'$ eine eigentliche holomorphe Abbildung, so gilt $s \leqq s'$ für die Stufen von X bzw. X'. Sind die Stufen gleich, so ist τ faktorisierbar als direktes Produkt von eigentlichen holomorphen Abbildungen $\hat{\tau}_\lambda : X_\lambda \to X'_\lambda$ $(\lambda = 1,\ldots,s)$. (Vgl. Satz 5 und Satz 6)

In § 5 verallgemeinern wir den Begriff Polyedergebiet und beweisen, daß auch für eigentliche holomorphe Abbildungen zwischen gleich-dimensionalen Polyedergebieten die Beziehung $s \leqq s'$ zwischen den Stufen bestehen muß.

Um die Anwendungsmöglichkeit der bewiesenen Sätze auf eigentliche Abbildungen, in denen homogene Gebiete als Bildgebiete auftreten, zu prüfen, untersuchen wir im letzten Paragraphen die Frage der Existenz lokalanalytischer Mengen auf dem Rand eines beschränkten irreduziblen homogenen Gebietes in C^n. Wir kommen zu folgendem Ergebnis "Die Hyperkugel ist der einzige Repräsentant der irreduziblen beschränkten homogenen Gebiete in C^n, der auf dem Rand keine lokalanalytischen Mengen des C^n enthält.

In dieser Untersuchung benützen wir die von C.L.Siegel aufgestellten Repräsentanten der irreduziblen homogenen Gebiete für die vier Typen der Klassifikation von E.Cartan. Der erste Typus, zu dem die Hyperkugel gehört, wird etwas näher behandelt. Es wird eine Äquivalenz bezüglich der

Gruppe der analytischen Automorphismen des Gebietes zwischen den Randpunkten definiert und es werden notwendige und hinreichende Bedingungen für die Äquivalenz zweier Randpunkte angegeben (Satz 15).

Für die anderen drei Typen beschränken wir uns darauf, die Existenz positiv-dimensionaler analytischer Mengen auf dem Rand festzustellen.

Es sei mir gestattet, Herrn Professor Dr.K.Stein für die Anregung zu dieser Arbeit und die wertvollen Ratschläge bei ihrer Durchführung zu danken.
Mein Dank gilt auch der Fundaçao Calouste Gulbenkian (Portugal)*), die mit einem Stipendium meinen Aufenthalt in Deutschland ermöglicht hat.

---

*) Der Verfasser erhielt für die Durchführung dieser Arbeit ein Stipendium der "Fundaçao Calouste Gulbenkian" (Portugal).

§ 1 Eigentliche Abbildungen

1-1. Es seien R und R' lokalkompakte Räume.[1)]
Eine stetige Abbildung $\tau: R \to R'$ heißt eigentlich, wenn das Urbild jeder kompakten Menge in R' eine kompakte Menge in R ist.
Man beweist mit Hilfe eines Satzes von N. Bourbaki[2)]:
a) Eine stetige Abbildung $\tau: R \to R'$ ist genau dann eigentlich, wenn gilt: Ist f irgendein Filter auf R ohne Berührungspunkt, so besitzt der Bildfilter $\tau(f)$ keinen Berührungspunkt auf R'.

1-2. Wir benützen in der Folge eine von R.Remmert und K.Stein[3)] stammende Verallgemeinerung des oben eingeführten Begriffes. Sei B eine offene Teilmenge von R, $\overline{B}$ bzw. $\partial B := \overline{B} - B$ die abgeschlossene Hülle bzw. der Rand von B in bezug auf R. Eine stetige Abbildung $\tau: B \to R'$ heißt eigentlich in einem Randpunkt $p^* \in \partial B$, wenn zu jeder kompakten Menge K' in R' eine Umgebung $U(p^*) \subset R$ von p^* existiert, derart, daß $U(p^*) \cap \tau^{-1}(K')$ leer ist.
Ohne Mühe läßt sich folgendes beweisen:
b) Eine eigentliche Abbildung $\tau: B \to R'$ ist in jedem Punkt von ∂B eigentlich. Umgekehrt gilt: Ist B relativkompakt in R und τ eigentlich in jedem Punkt von ∂B, so ist τ eigentlich.
Im Zusammenhang mit a) beweisen wir:
c) Eine stetige Abbildung $\tau: B \to R'$ ist genau dann eigentlich in $p^* \in \partial B$, wenn gilt: Ist f der auf B durch den Umgebungsfilter von p^* in R induzierte Filter, so besitzt der Bildfilter $\tau(f)$ keinen Berührungspunkt in R'.
Sei τ in $p^* \in \partial B$ eigentlich. Wir bezeichnen mit K' eine kompakte Umgebung eines beliebigen Punktes $p' \in R'$ und wählen $U(p^*) \subset R$ mit der in der Definition angegebenen Eigenschaft.

---

1) Alle topologischen Grundbegriffe sind im Sinne von N.Bourbaki (3) zu verstehen.
2) (3), chap 1, § 10, Nr. 9 Prop. 15.
3) (20), § 5, Def. 4.

Dann gilt $(U(p^*)\cap B)\cap K'=\emptyset$. Das bedeutet, daß p' kein Berührungspunkt von $\tau(f)$ ist. Umgekehrt, wenn p' kein Berührungspunkt von $\tau(f)$ ist, so gibt es eine Umgebung $U'\subset R'$ von p' und eine Umgebung U von p* in R, so daß $U\cap\bar{\tau}^{-1}(U')=\emptyset$. Zu jeder kompakten Menge $K'\subset R'$ kann man dann endlich viele Punkte p' aus K' wählen, derart, daß die zugeordneten Umgebungen U' die Menge K' überdecken. Der Durchschnitt $U^*(p^*)$ der entsprechenden Umgebungen von p* erfüllt die Bedingung $U^*(p^*)\cap\bar{\tau}^{-1}(K')=\emptyset$, wie man leicht kontrolliert.

Diese Aussage hat eine Folgerung, die für Anwendungen geeignet ist:

d) Es seien R und R' lokalkompakte Räume, B und B' offene Mengen in R bzw. R' und $\tau:B\to B'$ eine stetige und in $p^*\in\partial B$ eigentliche Abbildung. Dann gilt: Ist $p^{(n)}\in B$ eine Folge, die gegen p* konvergiert, so liegen sämtliche Häufungspunkte von $\tau(p^{(n)})$ auf $\partial B'$.

Wir bemerken ausdrücklich, daß nicht behauptet wird, daß $\tau(p^{(n)})$ überhaupt Häufungspunkte in R' besitzt. Das ist aber immer der Fall, wenn B' in R' relativkompakt ist.

§ 2 Holomorphe Abbildungen

Alle in der Folge auftretenden komplexen Räume seien normal und endlich-dimensional.
Zum Begriff der komplexen Räume, holomorphen Funktionen, holomorphen Abbildungen, analytischen Mengen in komplexen Räumen usw. sei auf die ausführliche Darstellung von H.Grauert und R.Remmert (13) verwiesen. Normale komplexe Räume sind hier als α-Räume bezeichnet. Sie stimmen mit den komplexen Räumen nach Cartan (éspace analytique genérale) (8) oder nach Behnke-Stein (1) überein. Zur Theorie der Dimension analytischer Mengen in komplexen Räumen siehe auch (19). Wenn nicht ausdrücklich anders bemerkt wird, bedeutet Dimension in dieser Arbeit komplexe Dimension. Ist $d_X(X)$ die komplexe Dimension des Raumes X in $x \in X$, so ist $2d_X(X)$ die topologische Dimension im Sinne von Menger-Hurewics (15).

2-1. Gegeben sei eine holomorphe Abbildung $\tau: X \to X'$ zwischen komplexen Räumen X und X', $d_x(X)$ und $d_x(\tau^{-1}(\tau(x))$ seien die Dimensionen von X bzw. von der Faser $\tau^{-1}(\tau(x))$ in $x \in X$. $r_x(\tau) := d_x(X) - d_x(\tau^{-1}(\tau(x))$ heißt der Rang von τ in x. Unter Rang von τ schlechthin versteht man $r(\tau) := \max r_x(\tau)$. Ist $r_x(\tau)$ nicht lokalkonstant in $x^o \in X$, so sagt man, daß x^o zu der Entartungsmenge $E(\tau)$ von gehört. $E(\tau)$ ist genau dann leer, wenn $r_x(\tau)$ auf jeder zusammenhängenden Komponente von X konstant bleibt. Sind alle Fasern der Abbildung τ nulldimensional, oder, was dasselbe bedeutet, diskrete Mengen in X, so nennen wir τ eine diskrete Abbildung. Bei solchen Abbildungen ist insbesondere $E(\tau) = \emptyset$.

2-2. Ist $\tau: X \to X'$ eine holomorphe Abbildung, so gilt stets $r(\tau) \leq d(X')$, denn $\tau(X)$ enthält lokalanalytische Mengen des X' mit der Dimension $r(\tau)$.[4] Bei eigentlichen Abbildungen ist $\tau(X)$ sogar eine $r(\tau)$-dimensionale analytische Menge in X'.[5]

---

4) R.Remmert (18), Satz 18 und 19, vgl. auch R. Remmert und K. Stein (20), Satz 1.
5) (18), Satz 23.

Der Rang einer eigentlichen Abbildung $r_X(\tau)$ ist konstant und gleich der Dimension von X, falls X K-vollständig[6] ist. Denn die Fasern sind kompakte analytische Mengen und bestehen daher aus endlich vielen Punkten. Besitzt X' dieselbe Dimension, so ist die Abbildung nach R.Remmert (18) offen (Satz 28) und surjektiv. Damit ist τ eine Überlagerungsabbildung.[7] Ist außerdem der Bildraum ein direktes Produkt $X'=X'_1 \times X'_2$, so sind die Komponenten $\tau_\mu := \varphi'_\mu \circ \tau : X \to X'_\mu$, wobei $\varphi'_\mu : X' \to X'_\mu$ ($\mu=1,2$) die Projektionsabbildung bezeichnet, offen und surjektiv und damit ist $r(\tau_\mu)=d(X_\mu)$ (Satz 29).

2-3. Es seien $\tau : X \to X'$ und $\tau_0 : X \to X'_0$ holomorphe Abbildungen desselben Raumes X. Bezeichne $(\tau,\tau_0) : X \to X' \times X'_0$ die, durch die Zuordnung $x \to (\tau(x),\tau_0(x))$ definierte Abbildung und sei $r_X(\tau,\tau_0)$ ihr Rang in $x \in X$. $r_X(\tau_0 : \tau) := r_X(\tau,\tau_0) - r_X(\tau)$ heiße der Rang von τ_0 in bezug auf τ im Punkt $x \in X$ und $r(\tau_0 : \tau) := \max_{x \in X} r_X(\tau_0 : \tau)$ der Rang von τ_0 in bezug auf τ schlechthin.

τ_0 heißt abhängig von τ, wenn $r(\tau_0 : \tau) = 0$.

a) $\tau_0 : X \to X'_0$ ist genau dann von $\tau : X \to X'$ abhängig, wenn jede Niveaumenge (zusammenhängende Komponente einer Faser) von τ in einer Niveaumengen von τ_0 enthalten ist.

Wenn τ einen konstanten Rang $r_X(\tau)=r \neq 0$ besitzt, gilt $A(\tau_0 : \tau) := \{x : r_X(\tau_0 : \tau)=0\} = \{x : r_X(\tau,\tau_0) \leq r\}$, weil immer $r_X(\tau,\tau_0) \geq r$. $A(\tau_0 : \tau)$ ist nach R.Remmert (18) eine analytische Menge in X. Daraus folgt:

b) Es sei X zusammenhängend und $\tau : X \to X'$ eine holomorphe Abbildung mit konstantem Rang. Ist $\tau_0 : X \to X'_0$ in einer offenen Menge $U \subset X$ von τ abhängig, so ist τ_0 in ganz X von τ abhängig.

---

6) Zum Begriff der K-vollständigen Räume siehe H.Grauert (10).
7) Zum Begriff der Überlagerungsabbildungen siehe R.Remmert und K.Stein (20).

Ist τ_0 von τ und τ von τ_0 abhängig, so heißen τ und τ_0 verwandte Abbildungen. Ist keine der Abbildungen τ_0 und τ von der anderen abhängig, so sagen wir, daß τ und τ_0 schwach unabhängig sind.

Aus $r_X(\tau:\tau_0)-r_X(\tau_0:\tau)=r_X(\tau)-r_X(\tau_0)$ folgt:

c) Zwei holomorphe Abbildungen mit demselben konstanten Rang sind entweder schwach unabhängig oder miteinander verwandt.

2-4. $\tau:X\to X'$ heißt eine maximale Abbildung, wenn τ surjektiv ist und zu jeder von τ abhängigen holomorphen Abbildung $\tau_0:X\to X'_0$, eine holomorphe Abbildung $\sigma_0:X'\to X'_0$ mit $\tau_0=\sigma_0\circ\tau$ existiert. Wenn zu $\tau:X\to X'$ eine maximale verwandte holomorphe Abbildung $\tau^*:X\to X^*$ existiert, so nennt man das Paar (X^*,τ^*) eine komplexe Basis zur Abbildung τ. Wenn zu $\tau:X\to X'$ eine komplexe Basis existiert, so ist sie bis auf biholomorphe Abbildungen eindeutig bestimmt.[8]

Folgende Aussage liefert einfache Beispiele von maximalen Abbildungen:

d) Jede offene surjektive einfache[9] holomorphe Abbildung ist maximal.

Beweis: Erfüllt $\tau:X\to X'$ diese Bedingungen und ist $\tau_0:X\to X'_0$ von τ abhängig, so ist jede Faser $\tau^{-1}(x')$ $x'\in X'$ von τ in einer Niveaumenge von τ_0 enthalten. Durch die Zuordnung $x'\to\sigma(x'):=\tau_0(\tau^{-1}(x'))$ wird eine Abbildung $\sigma:X'\to X'_0$ mit $\sigma\circ\tau=\tau_0$ definiert, die holomorph ist.[10]

2-5. Wir werden in dieser Arbeit hauptsächlich Abbildungen von direkten Produkten von komplexen Räumen behandeln. Um solche Abbildungen zu untersuchen, ist es zweckmäßig, noch einen Begriff einzuführen.

Es seien X,Y,X' komplexe Räume und $\tau:X\times Y\to X'$ eine holomorphe Abbildung. Wir betrachten bei festen y die Abbildung $\tau_y:X\to X'$, die durch die Zuordnung $\tau_y:x\to\tau(x,y)$ definiert wird, und

---

8) K. Stein (24).
9) Eine Abbildung heißt einfach, wenn ihre Fasern zusammenhängend sind.
10) K. Stein (24), Satz 2 nebst Zusatz.

setzen $r_{(x,y)}(\tau:X):=r_x(\tau_y)$ und $r(\tau:X)=\max r_{(x,y)}(\tau:X)$ für $(x,y)\in X\times Y$. $r_{(x,y)}(\tau:X)$ bzw. $r(\tau:X)$ nennen wir den Rang von τ relativ zu X in (x,y) bzw. in $X\times Y$.
Wenn τ eine diskrete Abbildung ist, so sind alle Abbildungen $\tau_y:X\to X'$ und $\tau_x:Y\to X'$ diskret. Deshalb gilt:
e) Ist $\tau:X\times Y\to X'$ eine diskrete Abbildung, so gilt $r(\tau:X)=d(X)$, $r(\tau:Y)=d(Y)$.
Andererseits sei $\psi:X\times Y\to Y$ die Projektionsabbildung. Dann:
$r_{(x,y)}(\tau:\psi)=r_{(x,y)}(\tau,\psi)-r_{(x,y)}(\psi)=d_{(x,y)}(X\times\{y\})-d_{(x,y)}\bar{\tau}^1(x,y))$
$\cap\,\bar{\psi}^1(\psi(x,y)) = d_x(X)-d_x(\bar{\tau}_y^{-1}(\tau_y(x)) = r_{(x,y)}(\tau:X)$

f) Es gilt $r_{(x,y)}(\tau:X)=r_{(x,y)}(\tau:\psi)$, wobei $\psi:X\times Y\to Y$ die Projektionsabbildung bezeichnet.

2-6. Wenn X zusammenhängend ist, ist nach d) ψ eine maximale Abbildung. Deshalb gilt:
g) Es sei X ein zusammenhängender komplexer Raum und $\tau:X\times Y\to X'$ eine holomorphe Abbildung. Genau dann ist $r(\tau:X)=0$, wenn eine holomorphe mit τ gleichrangige Abbildung $\hat{\tau}:Y\to X'$ mit $\tau=\hat{\tau}\circ\psi$ existiert.
Die Behauptung über den Rang von $\hat{\tau}$ folgt unmittelbar aus der einfachen Gleichung:
$\{(x,y):\tau(x,y)=\tau(x_0,y_0)\} = X\times\{y:\hat{\tau}(y)=\hat{\tau}(y_0)\}$.
h) Ist X zusammenhängend, $\tau:X\times Y\to X'$ eigentlich und $r(\tau:X)=0$, so ist X kompakt und $\hat{\tau}:Y\to X'$ eine eigentliche Abbildung.
Denn mit $K'\subset X'$ ist $\bar{\tau}^1(K')=\bar{\psi}^1(\bar{\hat{\tau}}^1(K'))=X\times\bar{\hat{\tau}}^1(K')$.
Sei jetzt Y ein Teilgebiet des komplexen Raumes Y^*, ferner τ eigentlich auf $X\times L\subset X\times\partial Y$ und $r(\tau:X)=0$. Ist eine kompakte Menge $K'\subset X'$ vorgegeben, so können wir eine Umgebung von der Gestalt $U(x_0)\times V(y_0)$ eines Punktes $(x_0,y_0)\in X\times L$ finden, so daß $U(x_0)\times V(y_0)\cap\bar{\tau}^1(K')=\emptyset$. Dann ist aber $V(y_0)\cap\bar{\tau}^1(K')=\emptyset$. Deshalb:
i) Ist X zusammenhängend, Y ein Teilgebiet von Y^*, $\tau:X\times Y\to X'$ eigentlich auf $X\times L\subset X\times\partial Y$ und $r(\tau:X)=0$, so ist $\hat{\tau}$ eigentlich auf L.

2-7. Wenn X und X' offene Mengen der Zahlenräume $C^n(x_1,\ldots,x_n)$ und $C^m(x'_1,\ldots,x'_m)$ sind, so wird $\tau: X\times Y \to X'$ durch ein System

$$\sum(x,y): \quad x'_\lambda = f_\lambda(x_1,\ldots,x_n,y) \qquad \lambda = 1,2,\ldots,m$$

von holomorphen Funktionen in $X\times Y$ dargestellt.

Ist dann $\rho_{(x,y)}(\Sigma)$ der Rang der Funktionalmatrix $M(x,y) := \left(\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_\mu}\right)$ $\lambda = 1,2,\ldots,m$, $\mu = 1,2,\ldots,n$ im Punkt $(x,y)\in X\times Y$ und $\rho(\Sigma) := \max \rho_{(x,y)}(\Sigma)$ für $(x,y)\in X\times Y$, so gilt $r(\tau:X) = \rho(\Sigma)$.

In der Tat, $\tau_{y_0}: X \to X'$ wird durch das System $\Sigma_{y_0} := \Sigma(x,y_0)$ definiert. Nach R.Remmert (18) gilt: $\rho(\Sigma_{y_0}) = r(\tau_{y_0})$.

Nehmen $r_{(x,y)}(\tau:X)$ und $\rho_{(x,y)}(\Sigma)$ ihre Maxima in $(x^{(1)},y^{(1)})$ und $(x^{(2)},y^{(2)})$ an, so erhält man:

$$r(\tau:X) \leq r(\tau_{y(1)}) = \rho(\Sigma_{y(1)}) \leq \rho(\Sigma) \leq \rho(\Sigma_{y(2)}) = r(\tau_{y(2)}) \leq r(\tau:X)$$

2-8. Wir benötigen in der Folge einige neue Begriffe.
Es sei X ein Teilgebiet eines komplexen Raumes X^*. ∂X bezeichne den Rand von X bezüglich X^*. Eine Teilmenge $L \subset \partial X (L \neq \emptyset)$ heiße eine Radó'sche Menge für X in bezug auf X^*, wenn jede holomorphe, in X nicht identisch verschwindende Funktion mindestens einen von Null verschiedenen Randwert [11] auf L besitzt. Enthält ∂X eine Radó'sche Menge, so nennen wir ∂X einen Radó'schen Rand.
Wir erwähnen hier einen Satz von Radó-Behnke-Stein, der nach der Formulierung von H. Cartan [12] lautet: "Eine in einem normalen komplexen Raum X stetige und außerhalb ihrer Nullstellen holomorphe Funktion ist holomorph in X.
Aus diesem Satz folgt:

---

11) l heißt Randwert von f(x) in $x^* \in \partial X$, wenn eine Folge $x_n \in X$ mit $\lim f(x_n) = l$ existiert.

12) Vgl. T. Radó (17), H. Behnke und K. Stein (1), H. Cartan (7).

j) Ist L offen in ∂X und in keiner niederdimensionalen lokalanalytischen Menge von X^* enthalten, so ist L eine Radó'sche Menge für X bezüglich X^*.

Es sei $L:=U\cap\partial X(U\subset X^* \text{offen})$ eine solche Menge. Besitzt f(x) keinen von Null verschiedenen Randwert auf L, so ist:

$$g(x):=\begin{cases} f(x) & x\in U\cap X \\ 0 & x\in U-X \end{cases}$$

stetig und nach dem Satz holomorph in U. Die lokalanalytische Menge der Nullstellen von g(x) enthält L und muß nach der Voraussetzung mit U übereinstimmen. Daraus folgt $f(x)\equiv 0$ in $U\times X$ und wegen des Zusammenhanges auch in X.

Nach j) ist insbesondere jede offene Untermenge L X der topologischen Dimension 2d(X)-1 eine Radó'sche Menge für X. Wir nennen eine solche Menge eine ausgezeichnete Radó'sche Menge.

Es gilt ferner:

k) X und Y* seien zusammenhängende komplexe Räume und Y sei ein Teilgebiet von Y*. $X\times L\subset X\times\partial Y$ ist genau dann eine Radó'sche Menge für $X\times Y$, wenn L eine Radó'sche Menge für Y ist.

Sei $X\times L$ eine Radó'sche Menge für $X\times Y$ (in bezug auf $X\times Y^*$) und f(y) eine beliebige auf Y holomorphe Funktion. Sind alle Randwerte von f(y) auf L Null, so gilt dasselbe für $g(x,y):=f(y)$ auf $X\times L$. Daher ist $g(x,y)\equiv 0$ in $X\times Y$, d.h. $f(y)\equiv 0$ in Y. Umgekehrt, sei L eine Radósche Menge für Y (in bezug auf Y^*) und g(x,y) irgendeine auf $X\times Y$ holomorphe Funktion, deren Randwerte auf $X\times L$ sämtliche null sind. Für festes aber beliebiges $x\in X$ besitzt $f(y):=g(x,y)$ keinen von Null verschiedenen Randwert auf L und deshalb ist $f(y)\equiv 0$ in Y. Da $x\in X$ beliebig ist, gilt $g(x,y)\equiv 0$ in $X\times Y$.

2-9. Wir sind jetzt imstande, folgenden Satz zu formulieren:
Hilfssatz 1: Es seien X und X* zusammenhängende komplexe Räume, Y ein Teilgebiet von Y* und $\tau: X\times Y \to X'$ eine holomorphe Abbildung in ein beschränktes Gebiet X' des Zahlenraumes $C^m(x_1',\ldots,x_m')$ mit $r(\tau:X)>0$. Ist $L\subset\partial Y$ eine Radósche Menge für Y, so gibt es mindestens eine Folge $y^{(n)}\in Y$, die gegen einen Punkt $y^*\in L$ konvergiert, derart, daß $\tau_{y^{(n)}}: X\to X'$ kompakt gegen eine holomorphe Abbildung $\tau^*: X\to C^m$ mit $r(\tau^*)=r(\tau:X)$ konvergiert.

Wir beweisen zunächst den Satz für den Fall, daß X ein Gebiet des Zahlenraumes $C^1(x_1,\ldots,x_1)$ ist. τ wird dann durch ein System:

$$\Sigma(x,y): x_\lambda' = f_\lambda(x_1,\ldots,x_1,\ y) \qquad \lambda=1,2,\ldots,m$$

von holomorphen Funktionen vermittelt; $r(\tau:X)$ stimmt (siehe 2-7.) mit dem Rang $\rho(\Sigma)$ der Funktionalmatrix $M(x,y)=(\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_\mu})(\lambda=1,2,\ldots,m),\ (\mu=1,2,\ldots,1)$ überein.

Da X' beschränkt ist, bildet $f_\lambda(x,y)$, wenn man y als Parameter in Y betrachtet, eine in X normale Familie von holomorphen Funktionen und die Normalität überträgt sich auf die Familien der Ableitungen $\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_\mu}$ für alle Werte von $\lambda=1,2,\ldots,m$ und $\mu=1,2,\ldots,1$. Deshalb stellt jede Unterdeterminante von M(x,y) auch eine in X normale Familie dar.

Sei $\Delta(x,y)$ eine nichtidentisch verschwindende $\rho(\Sigma)$-reihige Unterdeterminante von M(x,y) und $\Delta(x_o,y_o)\neq 0$ $((x_o,y_o)\in X\times Y)$. Da L eine Radó'sche Menge für Y ist, besitzt $\Delta(x_o,y)$ einen von Null verschiedenen Randwert auf L, d.h. es existiert eine Folge $y^{(n)}\in Y$ mit $y^{(n)}\to y^*\in L$ derart, daß $\lim \Delta(x_o,y^{(n)})\neq 0$. Wegen der Normalität dürfen wir nach Montel annehmen, daß in X $\Delta(x,y^{(n)})$ kompakt gegen eine Funktion $\Delta^*(x)$ und das System $\Sigma(x,y^{(n)})$ kompakt gegen ein System $\Sigma^*(x)$ konvergiert. Nach einem Satz von Weierstrass sind sämtliche Grenzfunktionen

holomorph in X, und es ist $\Delta^*(x)$ die $\Delta(x,y)$ entsprechende Unterdeterminante der Matrix des Systems $\Sigma^*(x)$. Aus $\lim \Delta(x_o, y^{(n)}) \neq 0$ folgt $\Delta^*(x) \neq 0$. Daher hat $\Sigma^*(x)$ den Rang $\rho(\Sigma)$, und das gleiche gilt für den Rang der Abbildung $\tau^*: X \to C^m$, die durch $\Sigma^*(x)$ vermittelt wird.
$y^{(n)}$ ist eine gesuchte Folge.

Wir behandeln nun den allgemeinen Fall. Sei $r(\tau:X) = r_{(x_o,y_o)}(\tau:X) = r_{x_o}(\tau_{y_o})$. Da die Entartungsmenge von τ_{y_o} eine in X nicht dichte analytische Menge ist, kann man stets x_o als einen gewöhnlichen Punkt von X betrachten. Sei U eine offene Umgebung von x_o, die biholomorph auf ein Gebiet G des Zahlenraumes $C^l(u_1, \ldots, u_l)$ abbildbar ist.

Es bezeichne $\hat{\tau}: U \times Y \to X'$ die Beschränkung von τ auf $U \times Y$. Es gilt $r(\tau:\mathfrak{K}) = r(\hat{\tau}:U)$. $\hat{\tau}$ kann als eine Abbildung von $G \times Y$ in X' aufgefaßt werden, und $G \times L$ ist nach § 2 j) eine Radó'sche Menge für $G \times Y$. Nach dem oben Bewiesenen kann man eine Folge $y^{(n)} \in Y$ mit $y^{(n)} \to y^* \in L$ finden, derart daß $\hat{\tau}_{y^{(n)}}: U \to X'$ gegen eine holomorphe Abbildung $\hat{\tau}^*: U \to C^m$ mit $r(\hat{\tau}^*) = r(\tau:X)$ konvergiert. Aus $y^{(n)}$ wählen wir eine Teilfolge $y^{(n_k)}$ aus, für die $\tau_{y^{(n_k)}}: X \to X'$ gegen eine Abbildung $\tau^*: X \to C^m$ konvergiert. Dann ist aber $\hat{\tau}^*$ die Beschränkung von τ^* auf U und $r(\tau^*) = r(\hat{\tau})$. $y^{(n_k)}$ besitzt die in dem Satz verlangte Eigenschaft. Damit ist unser Satz vollständig bewiesen.

§ 3 Randbedingungen für die Existenz eigentlicher holomorpher Abbildungen

Wir wenden nun die Ergebnisse des letzten Paragraphen auf eigentliche holomorphe Abbildungen an.

3-1. **Satz 1: Es seien X und Y* zusammenhängende komplexe Räume, $Y \subset Y^*$ ein Gebiet und $\tau: X \times Y \to X'$ eine holomorphe Abbildung in ein beschränktes Gebiet X' des Zahlenraumes C^m. Ist τ eigentlich auf einer Radó'schen Menge $X \times L \subset X \times \partial Y$, so liegen auf $\partial X'$ lokalanalytische Mengen des C^m mit der Dimension $r(\tau:X)$.**

Beweis: Die Aussage ist trivial, falls $r(\tau:X)=0$. Sei nun $r(\tau:X)>0$. Nach Hilfssatz 1 und mit den dort benützten Bezeichnungen ist $\tau^*(X) \subset \partial X'$, weil jeder Punkt von $\tau^*(X)$ ein Randwert von τ auf $X \times L$ ist. $\tau^*(X)$ enthält aber lokalanalytische Mengen des C^m mit der Dimension $r(\tau^*)=r(\tau:X)$. (Siehe § 2-2.)

Bemerkung: Satz 1 ist insbesondere auf eigentliche Abbildungen anwendbar. Ist X nicht kompakt, so ist unter der Voraussetzung von Satz 1 stets $r(\tau:X)>0$ (§ 2,h). Aus Satz 1 folgt, daß direkte Produkte von Gebieten mit Radó'schem Rand, wie z.B. von Gebieten mit maximaler Dimension auf dem Rand[13], nicht auf beschränkte Gebiete des Zahlenraumes C^n eigentlich und holomorph abbildbar sind, falls deren Ränder keine positiv-dimensionalen lokalanalytischen Mengen des C^n enthalten. Solche Gebiete, werden wir im folgenden "Gebiete mit einfachem Rand" nennen. Die folgende Aussage liefert Beispiele für derartige Gebiete:

Jedes Gebiet im C^n, das durch eine Ungleichung $h<0$, wobei h eine strengplurisubharmonische Funktion ist, besitzt einfachen Rand.

Der Begriff "strengplurisubharmonisch" ist im folgenden Sinne gemeint: Sind $z_1,\ldots,z_n$ die Koordinaten in C^n, so heißt eine reelle zweimal stetig differenzierbare Funktion $h(z,\bar{z})$ strengplurisubharmonisch [14] in einer offenen Menge $U \subset C^n$, wenn die

---

13) $G \subset X$ heiße maximal-dimensional auf dem Rand, wenn die topologische Dimension von ∂G $2d(X)-1$ ist.

14) vgl. H.Grauert (11).

Hermitische Form:

$$L(h)=\sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 h}{\partial z_\mu \partial \bar{z}_\nu} a_\mu \bar{a}_\nu$$

für jeden Punkt $z \in U$ positiv definit ist. Dies ist z.B. bei der Hyperkugel $z_1\bar{z}_1 + \ldots + z_n\bar{z}_n < r^2$ der Fall.

Zum Beweis der obigen Aussage:

Es sei M eine in $G \subset C^n$ lokalanalytische Menge. Ist eine auf G streng plurisubharmonisch Funktion $h(z,\bar{z})$ konstant auf M, so ist M nulldimensional. Wäre dies nicht der Fall, so würde $h(z,\bar{z})$ konstant auf einer eindimensionalen lokalanalytischen Menge $M' \subset M$. Da die Plurisubharmonicität gegenüber Koordinantentransformationen invariant ist, dürfen wir annehmen, daß M' in der Umgebung eines gewöhnlichen Punktes durch folgende Gleichungen definiert wird:

$$z_2 = \ldots = z_n = 0.$$

Auf M' ist dann:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} = 0,$$

und dies widerspricht die Definitheit der Form L(h).

Die Unmöglichkeit, einen Dizylinder auf eine Hyperkugel holomorph und eigentlich abzubilden, wurde bereits von R.Remmert und K.Stein bewiesen.[15)]

3-2. Um Satz 1 verallgemeinern zu können, führen wir einige Definitionen ein.

Sei $X \subset X^*$ ein Gebiet des komplexen Raumes X^*. X heiße in $x^* \in \partial X$ zusammenhängend, wenn x^* eine Umgebungsbasis von offenen Mengen $\{U^*_t : U^*_t \subset X^*,\ t \in J(\text{Indexmenge})\}$ besitzt, derart daß $U^*_t \cap X$ zusammenhängend ist. Z.B. ist jedes konvexes Gebiet in C^n zusammenhängend in allen seinen Randpunkten.

Wir sagen, daß $H \subset X$ X nirgends zerlegt, wenn in jeder Umgebung eines Punktes $x^* \in H$ Punkte von H liegen, in denen X zusammenhängend ist.

---

15) (20) Satz 11 nebst Folgerung.

Hilfssatz 2: Es seien X^* ein n-dimensionaler komplexer Raum, $X \subset X^*$ ein Gebiet, $\varphi^*: X^* \to X_1^*$ eine holomorphe Abbildung mit $r(\varphi^*) := r < n$. Existiert auf ∂X eine ausgezeichnete Radó'sche Menge H, die X nirgends zerlegt und derart, daß $\varphi^*(H) \cap \varphi^*(X) = \emptyset$ ist, so gibt es ein Teilgebiet $G \subset X$, auf dessen Rand eine ausgezeichnete Radó'sche Menge $L \subset H$ liegt und eine biholomorphe Abbildung $\Psi: G \to G_1 \times G_2$ auf das direkte Produkt von Gebieten G_1 und G_2 von komplexen Räumen X_1' und X_2' mit den Dimensionen r bzw. n-r. Ψ ist zu einer Abbildung $\tilde{\Psi}: U(\overline{G}) \to X_1' \times X_2'$ fortsetzbar[16] und es gilt: $\tilde{\Psi}(L) = L_1 \times G_2$ mit $L_1 \subset \partial G_1$.

Wir beweisen zunächst den Hilfssatz für den Fall, daß der Rang r (φ^*) gleich der Dimension n_1 von X_1^* ist. $\varphi^*(X^*)$ enthält in diesem Fall n_1-dimensionale lokalanalytische Mengen. Die Menge N_1^* der nicht-gewöhnlichen Punkte von X_1^* hat eine Dimension $\leq n_1 - 2$.[17] Deswegen gilt $\varphi^*(X^*) \subset N_1^*$ nicht und $\overline{\varphi}^*(N_1^*) := M^*$ ist eine nieder-dimensionale analytische Menge in X^*. $L^* := M^* \cup N^*$, wobei N^* die Menge der nicht-gewöhnlichen Punkte von X^* bezeichnet, ist auch nieder-dimensional und $H \cap (X^* - L^*)$ eine ausgezeichnete Radó'sche Menge. Setzen wir $\psi^* := \varphi^* | X^* - L^* \to X_1^* - N_1^*$. ψ^* ist eine Abbildung zwischen zwei komplexen Mannigfaltigkeiten und besitzt auch den Rang n_1. Lokal wird ψ^* durch Systeme:

$$\Sigma) \quad \xi_\nu = f_\nu(x_1, \ldots, x_n) \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n_1$$

von holomorphen Funktionen definiert, wobei $(x_1, \ldots, x_n)$ und $(\xi_1, \ldots, \xi_{n_1})$ lokale komplexe Koordinaten in zugeordneten Punkten sind. Der maximale Rang $\rho(\Sigma)$ solcher Systeme ist auch n_1 und die analytische Menge der Punkte $x^* \in X^* - L^*$, in denen $\rho_{x^*}(\Sigma) < n_1$ gilt, ist niederdimensional. Deshalb gibt es mindestens einen Punkt $x_0^* \in H \cap (X^* - L^*)$, in dem der Rang des Systems n_1 ist. Sei

$$\Delta = \frac{\partial(f_1, \ldots, f_{n_1})}{\partial(x_1, \ldots, x_{n_1})} \neq 0 \text{ in } x_0^*.$$

16) $U(\overline{G})$ bezeichnet eine Umgebung von $\overline{G}$ in X^*.
17) H.Cartan (8).

Dasselbe gilt in einer Umgebung $U(x_0^*) \subset X^* - L^*$. Betrachten wir nun das System Σ'):

$$\Sigma') \qquad \xi_\nu = f_\nu(x_1,\ldots,x_n) \qquad \nu = 1,2,\ldots,n_1$$

$$\eta_\lambda = x_{n_1+\lambda} \qquad \lambda = 1,2,\ldots,n_2 = n-n_1$$

Σ' besitzt in $U(x_0^*)$ den konstanten Rang n. Es gibt deshalb eine offene Umgebung $V \subset U(x_0^*)$ von x_0^*, derart, daß Σ') eine biholomorphe Abbildung:

$$\Phi: V \to G_1' \times G_2$$

von V in das direkte Produkt von $G_1' \subset X_1^*$ und $G_2 \subset C^{n_2}(\eta)$ vermittelt. Wegen der Voraussetzung, die wir über H gemacht haben, dürfen wir annehmen, daß $L := V \cap \partial X$ in H enthalten ist und, daß $G := V \cap X$ zusammenhängend ist. Setzen wir

$$L_1 := \Phi_1(L) = \varphi^*(L)$$

$$G_1 := \Phi_1(G) = \varphi^*(G)$$

wobei $\Phi_1 : V \to G_1'$ eine der Komponenten von Φ ist. Dann gilt:

$$\Phi(L) \subset L_1 \times G_2$$

$$\Phi(G) \subset G_1 \times G_2.$$

Wir zeigen, daß sogar die Gleichheiten gelten. Da $L_1 \cap G_1 \subset \varphi^*(H) \cap \varphi^*(X) = \emptyset$ und $L \subset \partial G$, folgt $L_1 \subset \partial G_1$. $\Phi^{-1}(G_1 \times G_2)$ besitzt Punkte in G, aber keinen in L. $G_1 \times G_2$ ist zusammenhängend, deshalb kann $\Phi^{-1}(G_1 \times G_2)$ keine Punkte in der offenen Menge $V - G \cup L$ haben und folglich gilt $\Phi^{-1}(G_1 \times G_2) \subset G$ und schließlich $\Phi(G) = G_1 \times G_2$. Andererseits sind alle Punkte von $L_1 \times G_2$ Berührungspunkte von $G_1 \times G_2$. Deswegen liegt $\Phi^{-1}(L_1 \times G_2)$ in L und so gilt: $L_1 \times G_2 \subset \Phi(L)$. Die Abbildung $\psi = \Phi | G \to G_1 \times G_2$ besitzt die in dem Satz verlangten Eigenschaften.

---

18) K.Stein (25).

Für den Fall $r(\varphi^*)\neq n_1$ führen wir den Beweis auf den behandelten Fall zurück.
Da H eine ausgezeichnete Radó'sche Menge ist, gibt es mindestens einen Punkt $\blacksquare$ $x_0^*\in H$ und eine offene Umgebung $U^*\subset X^*$ von x_0^*, derart daß $\tau^*=\varphi^*|U^*\to X_1^*$ den konstanten Rang $r(\varphi^*)=r$ besitzt. Wir dürfen annehmen, daß $Y=U^*\cap X$ zusammenhängend ist und $L=U^*\cap\partial X\subset H$ gilt. Sei (Y_0^*,τ_0^*) eine komplexe Basis zur Abbildung τ^* [18]. Y_0^* ist ein r-dimensionaler Raum und $\tau_0^*:U^*\to Y_0^*$ eine surjektive Abbildung mit dem Rang r; $L\subset\partial Y$ ist eine ausgezeichnete Radó'sche Menge für Y, die Y nirgends zerlegt. Andererseits existiert eine holomorphe Abbildung $\sigma:Y_0^*\to X_1^*$ mit $\tau^*=\sigma\circ\tau_0^*$. Wegen $\sigma(\tau_0^*(Y)\cap\tau_0^*(L))\subset\tau^*(Y)\cap\tau^*(L)\subset\varphi^*(X)\cap\varphi^*(H)=\emptyset$, ist auch $\tau_0^*(Y)\cap\tau_0^*(L)=\emptyset$. Da die Abbildung τ_0^* und das Gebiet G die Bedingungen erfüllen, die in dem ersten Fall vorausgesetzt worden sind, ist die Behauptung richtig.
Folgerung: Unter den Voraussetzungen des Hilfssatzes 2 enthält H eine (topologisch) (2r-1)-dimensionale Schar von (komplex) (n-r)-dimensionalen lokalanalytischen Mengen von X*.
$L=\overline{\tau}^{-1}(L_1\times G_2)$ stellt eine solche Schar dar.

3-3. Wir formulieren folgende Verallgemeinerung des Satzes 1:

Satz 2: Es sei $\varphi^*:X^*\to X_1^*$ eine holomorphe Abbildung zwischen zusammenhängenden Räumen X^* und X_1^* mit konstantem Rang, $r=r(\varphi^*)<d(X^*)$. $X\subset X^*$ sei ein Gebiet, auf dessen Rand ∂X eine ausgezeichnete Radó'sche Menge H liegt, die X nirgends zerlegt und derart daß $\varphi^*(X)\cap\varphi^*(H)=\emptyset$. Ist $\tau:X\to X'$ eine holomorphe Abbildung in ein beschränktes Gebiet X' eines Zahlenraumes C^m, die auf H eigentlich ist, so enthält $\partial X'$ eine lokalanalytische Menge des C^m mit der komplexen Dimension $r(\tau:\varphi)$, wobei $\varphi:=\varphi^*|X$.

Beweis: Nach Hilfssatz 2 und dort verwendeten Bezeichnungen ist $\theta := \tau \circ \bar{\psi}^1 : G_1 \times G_2 \to X'$ eigentlich auf $L_1 \times G_2$. Nach Satz 1 enthält $\partial X'$ lokalanalytische Mengen des C^m mit der Dimension $r(\theta : G_2) = r(\theta : \pi_1)$, wobei $\pi_1 : G_1 \times G_2 \to G_1$ die Projektionsabbildung bezeichnet. Wegen der Biholomorphie von $\psi : G \to G_1 \times G_2$ gilt für $x \in G$:

$r_{\psi(x)}(\theta : \pi_1) = r_x(\theta \circ \psi : \pi_1 \circ \psi) = r_x(\tau : \psi_1) = r_x(\tau : \varphi^*)$ und

$r(\theta : G_2) = \max\limits_{x \in G} r_x(\tau : \varphi^*) = \max\limits_{x \in X} r_x(\tau : \varphi^*) = r(\tau : \varphi)$, weil φ^* konstanten Rang besitzt.

<u>Folgerung: Ist $\tau : X \to X'$ diskret und sind sonst alle Voraussetzungen des Satzes 2 erfüllt, so enthält $\partial X'$ positivdimensionale lokalanalytische Mengen des C^m.</u>

Wäre $r(\tau : \varphi) = 0$, so würde nach § 2 a) jede Niveaumenge von φ aus einem Punkt bestehen und damit φ eine diskrete Abbildung. Dies widerspricht der Annahme $r(\varphi^*) < d(X^*)$.

Wir geben ein Beispiel eines Gebietes an, auf dem der Satz 2, aber nicht der Satz 1 anwendbar ist.

Es sei $X^* = C^2(z_1, z_2)$ und $X = \{(z_1, z_2) : |z_1| < 1, |z_2| < |z_1|\}$. Sei $L_1 := \{z_1 : |z_1| = 1\}$, $G_2 := \{z_2 : |z_2| < 1\}$. $H := L_1 \times G_2$ ist eine ausgezeichnete Radó'sche Menge für X und zerlegt X nirgends. Für die Projektionsabbildung $\varphi^* : X^* \to C^1(z_1)$ gilt: $\varphi^*(H) = L_1$ und $\varphi^*(X) = \{z_1 : 0 < |z_1| < 1\}$ und damit $\varphi^*(H) \cap \varphi^*(X) = \emptyset$.

§ 4 Faktorisierung eigentlicher holomorpher Abbildungen

4-1. Ist $\tau : X \to X'$ eine Abbildung in ein direktes Produkt $X' = X'_1 \times \ldots \times X'_{s'}$, so werden unter den Komponenten von τ die Abbildungen $\tau_\mu = \varphi'_\mu \circ \tau : X \to X'_\mu$ ($\mu = 1, \ldots, s'$) verstanden, wobei $\varphi'_\mu : X' \to X'_\mu$ die Projektionsabbildung bezeichnet. Wir schreiben kurz: $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_{s'})$.

Hilfssatz 3: *G'_μ sei ein Teilgebiet des komplexen Raumes X'_μ ($\mu = 1, \ldots, s'$) und $\tau : X \to X'_1 \times \ldots \times X'_{s'}$ eine holomorphe Abbildung, derart daß $\tau(X) \subset (G'_1 \times \ldots \times G'_{s'})$ ist. Dann gibt es mindestens eine Komponente τ_μ von τ und eine offene Menge $U \subset X$ mit $\tau_\mu(U) \subset \partial G'_\mu$.*

Die Behauptung ist trivial, wenn $s' = 1$. Im Fall $s' > 1$ genügt es den Satz unter der Voraussetzung zu beweisen, daß $\tau_1(X) \not\subset \partial G'_1$.

Wir wenden vollständige Induktion nach der Anzahl der Faktoren von $G'_1 \times \ldots \times G'_{s'}$ an. Ist $x^0 \in X$ ein Punkt mit $\tau_1(x^0) \in G'_1$, so gibt es, wegen der Stetigkeit von τ_1, eine Umgebung V von x^0 mit $\tau_1(V) \subset G'_1$. Daraus folgt $(\tau_2, \ldots, \tau_{s'})(V) \subset \partial (G'_2 \times \ldots \times G'_{s'})$ und deshalb ist nach der Induktionsvoraussetzung $\tau_\mu(U) \subset \partial G'_\mu$, für mindestens einen Wert von $\mu = 2, \ldots, s'$ und für eine offene Menge $U \subset V$.

4-2. Wir beweisen folgenden Satz:

Satz 3: Es seien X und Y^* zusammenhängende komplexe Räume, Y ein echtes Teilgebiet von Y^*, X'_μ ein beschränktes Gebiet des Zahlenraumes C^{m_μ} ($\mu = 1, \ldots, s'$) und $\tau : X \times Y \to X'$ ($X' := X'_1 \times \ldots \times X'_{s'}$) eine holomorphe Abbildung, die auf einer Radó'schen Menge $X \times L \subset X \times \partial Y$ eigentlich ist. Enthält $\partial X'_\mu$ ($\mu = 1, \ldots, s'$) keine lokalanalytischen Mengen des C^{m_μ} mit der Dimension $\geq d$ ($d \geq 1$), so ist $r(\tau_\mu : X) < d$ für mindestens eine Komponente $\tau_\mu : X \times Y \to X'_\mu$ von τ.

Wir beschränken uns zunächst auf den Fall, daß X ein Gebiet eines Zahlenraumes $C^1(x_1, \ldots, x_1)$ ist.

Jede der Abbildungen τ_μ wird durch ein System $\Sigma_\mu(x,y)$ von holomorphen Funktionen in $X\times Y$ definiert. $M_\mu(x,y)$ bezeichne die zugeordnete Funktionalmatrix in den Variablen $x_1,\ldots x_l$ und $\Delta_\mu(x,y)$ irgendeine d-reihige Unterdeterminante von $M_\mu(x,y)$.

Um den Satz zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß alle Produkte:

$$\pi(x,y) := \Delta_1(x,y)\cdot\ldots\cdot\Delta_{s'}(x,y)$$

identisch null in $X\times Y$ sind. Weil $X\times L$ eine Radó'sche Menge ist, genügt es sogar zu beweisen, daß alle $\pi(x,y)$ lauter Randwerte null auf $X\times L$ besitzen.

Sei $y^{(n)}\in Y$ eine Folge, die gegen einen Punkt $y^*\in L$ strebt und $y^{(n_k)}$ irgendeine Teilfolge von $y^{(n)}$, für die alle $\pi(x,y^{(n_k)})$ in X konvergieren. Wir können außerdem annehmen, daß auch die Systeme $\Sigma_\mu(x,y^{(n_k)})$ sämtlich in X konvergieren. Wegen der Normalität ist in allen Fällen die Konvergenz kompakt und sind die Grenzfunktionen holomorph. Sei $\pi^*(x)=\lim\pi(x,y^{(n_k)})$ und bezeichne $\Sigma^*_\mu(x)$ das Grenzsystem von $\Sigma_\mu(x,y)$ und $\Delta^*_\mu(x)$ die $\Delta_\mu(x,y)$ entsprechende Unterdeterminante der Matrix $M^*_\mu(x)$ von $\Sigma^*_\mu(x)$. Nach dem Satz von Weierstrass gilt: $\lim\Delta_\mu(x,y^{(n_k)}) = \Delta^*(x)$ und folglich $\pi^*(x) = \Delta^*_1(x)\cdot\ldots\cdot\Delta^*_{s'}(x)$.

Sei $\tau^*_\mu : X\to C^{m_\mu}$ die durch Σ^*_μ vermittelte Abbildung und $\tau^* := (\tau^*_1,\ldots,\tau^*_{s'}) : X\to C^{m_1}\times\ldots\times C^{m_{s'}}$.

Da τ eigentlich in $X\setminus\{y^*\}$ ist, folgt $\tau^*(X)\subset\partial X'$. Wendet man auf die Abbildung τ^* den Hilfssatz 3 an, so ergibt sich, daß für mindestens einen Wert μ und eine offene Menge $U\subset X$ $\tau^*_\mu(U)\subset\partial X'_\mu$ gilt. Weil $\partial X'_\mu$ keine d-dimensionale lokalanalytische Menge des C^{m_μ} enthält, ist notwendigerweise $r(\tau^*_\mu)<d$. Daraus folgt, daß alle $\pi^*(x)$ gleich null sind, oder was dasselbe bedeutet, $\lim\pi(x,y^{(n_k)}) \equiv 0$. $y^{(n_k)}$ war aber eine beliebige Teilfolge von $y^{(n)}$, für die $\pi(x,y^{(n_k)})$ konvergiert. Deswegen gilt auch $\lim\pi(x,y^{(n)}) \equiv 0$. Andererseits war y^* irgendein Punkt von L. Deshalb hat $\pi(x,y)$ alle Randwerte null auf $X\times L$, was zu zeigen war.

Unser Satz ist, für den Fall, daß X ein Gebiet des C^1 ist, damit bewiesen. Man führt, genau wie in Satz 1 den allgemeinen Fall auf diesen zurück.

4→3. Wir wenden Satz 3 auf den Fall an, daß X'_μ ($\mu = 1,\dots s'$) Gebiete mit einfachem Rand sind. Dann ist für mindestens einen Wert von μ die Komponente τ_μ: $X \to X'_\mu$ der Abbildung $\tau : X \times Y \to X'_\mu$ von X unabhängig, d.h. $r(\tau_\mu : X) = 0$. In diesem Sinne sagen wir auch, daß τ_μ höchstens von Y abhängt.

Satz 4: Es sei X_λ ein Gebiet des zusammenhängenden komplexen Raumes X^*_λ ($\lambda = 1,\dots,s$), X'_μ ($\mu = 1,\dots,s'$) ein beschränktes Gebiet mit einfachem Rand eines Zahlenraumes und $\tau : X \to X'$ eine holomorphe Abbildung von $X := X_1 \times \dots \times X_s$ in $X' := X'_1 \times \dots \times X'_{s'}$. Ist $L_\lambda \subset \partial X_\lambda$ eine Radó'sche Menge für X_λ (in bezug auf X^*_λ) und τ eigentlich auf allen Randmengen $X_1 \times \dots \times X_{\lambda-1} \times L_\lambda \times X_{\lambda+1} \times \dots \times X_s$ ($\lambda = 1,\dots, s$), so läßt sich jedem Faktor X_λ von X einen Faktor X'_{μ_λ} von X' derart zuordnen, daß die Komponente $\tau'_{\mu_\lambda} : X \to X'_{\mu_\lambda}$ von $\tau : X \to X'$ höchstens von X_λ abhängt. Es gilt stets $s \leq s'$.

Beweis: Die Existenz einer solchen Zuordnung $X_\lambda \to X'_{\mu_\lambda}$ ($\lambda = 1,\dots, s$) folgt unmittelbar aus dem letzten Satz.
Um die Beziehung $s \leq s'$ zu beweisen, wenden wir vollständige Induktion nach s' an.
Ist $s' = 1$, so auch $s = 1$, denn aus Satz 1 folgt im Fall $s > 1$, daß für $\lambda = 1,\dots,s$ $r(\tau : X_\lambda) = 0$ gilt. Damit wäre τ, im Widerspruch zu der vorausgesetzten Eigentlichkeit, eine konstante Abbildung.
Sei nun $s' > 1$ und es gelte die Behauptung, wenn die Anzahl der Faktoren im Bildgebiet $s' - 1$ ist. Ist die oben angegebene Zuordnung $X_\lambda \to X'_{\mu_\lambda}$ ($\lambda = 1,\dots,s$) eineindeutig, d.h., entsprechen verschiedenen Faktoren von X auch verschiedene Faktoren von X', so ist die Beziehung $s \leq s'$ trivial. Andernfalls, wenn z.B. $X'_{\mu_1} = X'_{\mu_2} = X'_1$ gilt, so ist $\tau_1 : X \to X'_1$ gleichzeitig höchstens von X_1 und höchstens von X_2 abhängig,

und damit eine konstante Abbildung. Daher ist $(\tau_2, \tau_3, \ldots \tau_s)$: $X \to X'_2 \times \ldots \times X'_s$, in denselben Randmengen eigentlich wie τ. Wegen der Induktionsvoraussetzung ist deshalb $s \leq s' - 1$, und dies beweist unsere Behauptung.

Wie aus dem Beweis hervorgeht, läßt sich jede Zuordnung $X\lambda \to X'_{\mu\lambda}$ von der erwähnten Art durch eine eineindeutige ersetzen.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir in der Folge an, daß : $\mu_1 = 1, \mu_2 = 2, \ldots \mu_s = s$.

Wir behandeln nun den wichtigen Fall $s = s'$. In diesem Fall ist die Abbildung τ: $X \to X'$ als direktes Produkt faktorisierbar[19]: Es sei $\hat{\tau}_\lambda$: $X_\lambda \to X'_\lambda$ die holomorphe Abbildung, für die nach 2 - 6, g) $\tau_\lambda = \hat{\tau}_\lambda \circ \varphi_\lambda$ gilt, wobei φ_λ: $X \to X_\lambda$ die Projektionsabbildung bezeichnet, x_λ ein beliebiger Punkt von X_λ ($\lambda = 1, \ldots, s$) und $x := (x_1, \ldots, x_s)$. Dann gilt:

$$\tau(x) = (\tau_1(x), \ldots, \tau_s(x)) = (\hat{\tau}_1 \circ \varphi_1(x), \ldots, \hat{\tau}_s \circ \varphi_s(x)) =$$

$$= (\hat{\tau}_1(x_1), \hat{\tau}_2(x_2), \ldots, \hat{\tau}_s(x_s)).$$

Außerdem läßt sich die Eigentlichkeit von $\hat{\tau}_\lambda$ auf L_λ beweisen: Es sei $K'_1 \subset X'_1$ kompakt und $x^*_1 \in L_1$ beliebig. Ist x^0_μ irgendein Punkt von X_μ und $x'^0_\mu = \hat{\tau}_\mu(x^0_\mu)$ ($\mu = 2, \ldots, s$), so folgt aus der Eigentlichkeit von τ in $(x^*_1, x^0_2, \ldots x^0_s) =: x^*$, daß eine Umgebung von x^* in $X^*_1 \times \ldots \times X^*_s$, von der Gestalt $U_1(x^*_1) \times \ldots \times U_s(x^0_s)$, mit $\tau^{-1}(K'_1 \times \{x'_2\} \times \ldots \times \{x'_s\}) \cap (U_1(x^*_1) \times \ldots \times U_s(x^0_s)) = \emptyset$ existiert. Da aber $\hat{\tau}^{-1}_\mu(\hat{\tau}_\mu(x'_0)) \cap U_\mu(x^0_\mu) \ni x^0_\mu$ muß notwendigerweise $\hat{\tau}^{-1}_1(K'_1) \cap U_1(x^*_1) = \emptyset$ sein.

---

19) $\tau : X_1 \times \ldots \times X_s \to X'_1 \times \ldots \times X'_s$ heißt direktes Produkt der Abbildungen $\hat{\tau}_\lambda : X_\lambda \to X'_\lambda$ ($\lambda = 1, \ldots, s$), wenn für jedes $x = (x_1, \ldots, x_s)$ $\tau(x) = (\hat{\tau}_1(x_1), \ldots, \hat{\tau}_s(x_s))$ gilt.

Damit ist bewiesen:

Satz 5 (Faktorisierungssatz): Ist $s = s'$ und sind sonst die Voraussetzungen von Satz 4 erfüllt, so ist $\tau = X_1 \times \ldots \times X_s \to X'_1 \times \ldots \times X'_s$ direktes Produkt $\tau = \hat{\tau}_1 \times \ldots \times \hat{\tau}_s$ von Abbildungen $\hat{\tau}_\lambda : X_\lambda \to X'_{\mu_\lambda}$ $(\lambda = 1,\ldots,s)$, die auf L_λ eigentlich sind.

Für Abbildungen $\tau : X \to X'$, die eigentlich schlechthin sind, gilt eine zu Satz 5 ähnliche Aussage, die wir ausdrücklich formulieren:

Satz 6: Es sei X_λ ein Gebiet des zusammenhängenden komplexen Raumes X^*_λ mit Radó'schem Rand $(\lambda = 1,\ldots,s)$ und X'_μ ein beschränktes Gebiet eines Zahlenraumes mit einfachem Rand $(\mu = 1,2,\ldots,s)$. Dann ist jede eigentliche holomorphe Abbildung $\tau : X_1 \times \ldots \times X_s \to X'_1 \times \ldots \times X'_s$ direktes Produkt von eigentlichen Abbildungen.

Nach 1-2,b) ist dieser Satz ein spezieller Fall des Satzes 5, wenn X relativ kompakt in X^* liegt $(\lambda = 1,\ldots,s)$. Aber auch, wenn diese Voraussetzung nicht zutrifft, bleibt der Satz gültig. Aus Satz 5 folgt die Faktorisierung der Abbildung. Die Eigentlichkeit der Abbildungen $\hat{\tau}_\lambda : X_\lambda \to X'_\lambda$ ist dann beinahe trivial.

Satz 7: Läßt sich ein beschränktes Gebiet eines Zahlenraumes als direktes Produkt von Gebieten in Zahlenräumen mit einfachen Rändern darstellen, so sind die Faktoren bis auf analytische Äquivalenzen eindeutig bestimmt.

Es sei $X = X_1 \times \ldots \times X_s = X'_1 \times \ldots \times X'_{s'}$, wobei X_λ $(\lambda = 1,\ldots,s)$ und X'_μ $(\mu = 1,\ldots,s')$ die vorausgesetzten Bedingungen erfüllen. Weil ein beschränktes Gebiet in C^n auf dem Rand maximaldimensional ist [21], ist Satz 5 auf die identische Abbildung von X anwendbar. Man bekommt unmittelbar $s = s'$ und die Abbildungen $\hat{\tau}_\lambda = X_\lambda \to X'_\lambda$, die in dem Faktorisierungssatz vorkommen, sind biholomorph.

---

21) W. Hurewics and H. Wallman (15), S. 46.

Wir beschließen diesen Abschnitt mit folgender Bemerkung: Hilfssatz 2 gibt hinreichende Bedingungen dafür, daß sich ein Gebiet $X \subset X^*$, in der Umgebung eines Randpunktes, als direktes Produkt von Gebieten in niederdimensionalen Räumen darstellen läßt. Mit Hilfe solcher Darstellungen ist Satz 1 zu Satz 2 verallgemeinert worden. Ähnlicherweise läßt sich folgende Aussage formulieren, die in naheliegendem Sinne eine Verallgemeinerung der ersten Behauptung des Satzes 4 darstellt.

Satz 8: Sei X'_μ $(\mu = 1,\ldots,s')$ ein beschränktes Gebiet mit einfachem Rand eines Zahlenraumes und $X' := X'_1 \times \ldots \times X'_{s'}$. Sind sonst alle Voraussetzungen des Satzes 2 erfüllt, so ist mindestens eine Komponente $\tau_\mu : X \to X'_\mu$ der Abbildung $\tau : X \to X'$ von φ abhängig.

§ 5 Eigentliche Zylindergebiete

5-1. Um die Ergebnisse der letzten Paragraphen verallgemeinern zu können, überprüfen wir zunächst die Bedingungen, die an die Urbildräume gestellt worden sind.

α) Wenn X als direktes Produkt $X=X_1\times\ldots\times X_s$ darstellbar ist, wird X ein System von Abbildungen $\varphi_\mu: X\to X_\mu$ mit folgenden Eigenschaften zugeordnet:

a) φ_μ ist offen, einfach und surjektiv.

b) Die komponierte Abbildung $\varphi=(\varphi_1,\ldots,\varphi_s)$ ist, als identische Abbildung, biholomorph.

Wenn man einem komplexen Raum X eine Abbildung $\varphi_\mu: X\to X_\mu$ unter schwächeren Bedingungen als a) zuordnet, sind einige Randeigenschaften von direkten Produkten in X feststellbar.

Von diesem Standpunkt aus ist wesentlich, daß die Abbildung φ_μ einen Rang kleiner als die Dimension von X besitze (vgl. Hilfssatz 2 neben Folgerung).

Andererseits ist zu erwarten, daß, wenn man statt der Biholomorphie nur die Eigentlichkeit der zusammengesetzten Abbildung verlangt, eine gewisse Übertragung der Randeigenschaften des Raumes auf das Bildgebiet bei eigentlichen Abbildungen noch möglich sein wird.

ß) Wir haben oft verlangt, daß die Faktoren X_μ von X echte Teilgebiete der Räume X^*_μ sein sollen. Dies zeigt, daß in einem Oberraum X* von X (in dem Fall $X^*=X^*_1\times\ldots\times X^*_s$) Abbildungen $\varphi^*_\mu: X^*\to X^*_\mu$ mit den Eigenschaften a) definiert sind, derart daß $\varphi_\mu=\varphi^*_\mu \mid X\to X_\mu$ ist. Wir merken noch an, daß mit $L_\mu\subset\partial X_\mu$ gilt: $\varphi^*_\mu\,(X_1\times\ldots\times L_\mu\times\ldots\times X_s)\cap\varphi^*_\mu(X)=\emptyset$.

5-2. Es seien X* und X^*_λ $(\lambda=1,\ldots,s)$ komplexe Räume und $\varphi^*_\lambda: X^*\to X^*_\lambda$ $(\lambda=1,\ldots,s)$ eine holomorphe Abbildung.

Ein relativkompaktes Teilgebiet X von X* heiße ein eigentliches Zylindergebiet von X*, wenn gilt:

a) $\varphi_\lambda:=\varphi^*_\lambda \mid X\to X_\lambda$ ist eine offene Abbildung für jedes $\lambda=1,\ldots,s$ $(X_\lambda:=\varphi^*_\lambda(X)$ offen in $X^*_\lambda)$.

b) $\partial X=\bigcup_{\lambda=1}^{s} H_\lambda$, wobei H_λ eine ausgezeichnete Radó'sche Menge für $\varphi^{-1}_\lambda X$ bezeichnet, die X nirgends zerlegt, derart daß

$$\varphi^*_\lambda(X)\cap\varphi^*_\lambda(H_\lambda)=\emptyset.$$

Die Abbildungen $\varphi_\lambda : X \to X_\lambda$ heißen charakteristische Abbildungen von X. Nach b) ist jede Abbildung φ_λ auf $H\lambda$ eigentlich und die zusammengesetzte Abbildung $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_s): X \to X_1 \times \ldots \times X_s$ eigentlich schlechthin (siehe § 1 b)).

Zu jeder Abbildung φ_λ gehört eine einfache Zerlegung $Z\lambda$ von X, deren Elemente die Niveaumengen von φ_λ sind. Z_λ heißt eine charakteristische Zerlegung von X ($\lambda = 1, \ldots, s$). Die Anzahl der verschiedenen charakteristischen Zerlegungen von X ist die Stufe von X. Wir werden zeigen, daß für spezielle eigentliche Zylindergebiete die Stufe von dem besonderen System der Abbildungen $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ unabhängig ist.

Wir merken noch an, daß die Elemente einer charakteristischen Zerlegung rein-$(n-n\lambda)$-dimensionale analytische Mengen in X sind ($n = d(X)$, $n\lambda = d(X_\lambda)$).

Ein eigentliches Zylindergebiet $X \subset X^*$ wird Polyedergebiet genannt, wenn X_λ ein beschränktes Gebiet eines Zahlenraumes $X^*_\lambda := C^{n_\lambda}$ ($\lambda = 1, \ldots, s$) mit einfachem Rand ist.

Hilfssatz 4: Ist $\tau : X \to X'$ eine eigentliche holomorphe Abbildung eines eigentlichen Zylindergebietes X von X^* in ein Polyedergebiet X', so existiert zu jeder charakteristischen Abbildung φ_λ von X eine charakteristische Abbildung $\varphi'_{\mu\lambda}$ von X', derart daß $\varphi'_{\mu\lambda} \circ \tau : X \to X'_{\mu\lambda}$ von φ_λ abhängt.*)

Beweis: Es seien $\varphi_\lambda : X \to X_\lambda$ ($\lambda = 1, \ldots, s$) und $\varphi'_\mu : X' \to X'_\mu$ ($\mu = 1, \ldots, s'$) die charakteristischen Abbildungen von X bzw. X'.

$\varphi' \circ \tau : X \to X'_1 \times \ldots \times X'_{s'}$, wobei $\varphi' = (\varphi'_1, \ldots, \varphi'_{s'}): X' \to X'_1 \times \ldots \times X'_{s'}$, bezeichnet, ist eine eigentliche Abbildung. Nach dem Satz 8 besitzt $\varphi' \circ \tau$ mindestens eine Komponente, die von φ_λ abhängig ist.

Wir behandeln nun einen Fall, in dem zu voneinander unabhängigen φ_λ und φ_{λ^*}, die zugeordneten $\varphi'_{\mu\lambda}$ und $\varphi'_{\mu\lambda^*}$ auch voneinander unabhängig sind.

Wir nennen X regulär, wenn die charakteristischen Abbildungen von X denselben Rang r besitzen. r heiße der Index von X.

*) vgl. R. Remmert und K. Stein (20), Hilfssatz 2.

Satz 9: Wenn in Hilfssatz X und X' regulär mit denselben Index sind und $\tau : X \to X'$ eine Überlagerungsabbildung ist, bildet τ jede charakteristische Zerlegung Z_λ von X auf eine charakteristische Zerlegung von X'. Mit $Z_\lambda \neq Z_{\lambda^*}$ gilt auch: $Z'_{\mu_\lambda} \neq Z'_{\mu_{\lambda^*}}$. Insbesondere gilt $\sigma \leq \sigma'$ für die Stufen σ und σ von X bzw. X'.*)

Beweis: Betrachte man irgendeine charakteristische Zerlegung von X, z.B. Z_1 und bezeichne $\varphi'_{\mu_1} : X' \to X'_{\mu_1}$ eine charakteristische Abbildung von X', mit φ'_{μ_1} oτ abhängig von φ_1. Da τ eine diskrete Abbildung ist, besitzen $\varphi'_{\mu_1} \circ \tau$ und φ'_{μ_1} denselben Rang $r(\varphi'_{\mu_1}) = r(\varphi_1)$; $\varphi'_{\mu_1} \circ \tau$ und φ_1 sind miteinander verwandt. Jedes Element M_1 von Z_1 wird durch τ in ein Element M'_{μ_1} von Z'_{μ_1} abgebildet. Es gilt sogar $\tau(M_1) = M'_{\mu_1}$: Aus der Eigentlichkeit von τ folgt, daß $\tau(M_1)$ in M'_{μ_1} abgeschlossen ist. Mit Rücksicht auf den Zusammenhang von M'_{μ_1}, genügt es zu zeigen, daß $\tau(M_1)$ auch offen in M'_{μ_1} ist. Es sei x' ein beliebiger Punkt von $\tau(M_1)$ und x ein Punkt von M_1 mit $\tau(x) = x'$. Bezeichne U eine offene Umgebung von x in X, derart daß keine andere Niveaumenge der Faser F_1 von $\varphi'_{\mu_1} \circ \tau$, in der M_1 liegt, in U eindringt, d.h., $U \cap M_1 = U \cap F_1$ (wir haben schon gezeigt, daß M_1 auch eine Niveaumenge von $\varphi'_{\mu_1} \circ \tau$ ist). Es sei $V = \tau(U)$. V ist eine offene Menge, denn τ ist eine offene Abbildung. Ist jetzt x'_0 irgendein Punkt von $V \cap M'_{\mu_1}$ und $x_0 \in U$ ein Punkt mit $\tau(x_0) = x'_0$, so gilt $\varphi'_{\mu_1}(x'_0) = \varphi'_{\mu_1}(M'_{\mu_1}) = \varphi'_{\mu_1} \circ \tau(M_1)$ und infolgedessen $x_0 \in U \cap M_1 = U \cap F_1$. Schließlich hat man $x'_0 \in \tau(M_1)$ und $V \cap M'_{\mu_1} \subset \tau(M_1)$. Diese Inklusion zeigt, daß $\tau(M_1)$ in M'_{μ_1} offen ist.

*) vgl. R. Remmert und K. Stein (20), Satz 14.

Auf diese Weise wird zu jeder charakteristischen Zerlegung Z_λ von X eine eindeutig bestimmte Zerlegung $Z'_{\mu\lambda}$ von X' zugeordnet. Z_λ wird auch durch $Z'_{\mu\lambda}$ eindeutig definiert, weil die Elemente von Z_λ die zusammenhängenden Komponenten der Urbilder der Elemente von $Z'_{\mu\lambda}$ sind. Daraus folgt unsere Behauptung.

Wendet man Satz 9 auf die identische Abbildung eines Polyedergebietes an, so erhält man unmittelbar:

Satz 10: Die Stufe eines regulären Polyedergebietes ist von dem speziellen System der charakteristischen Abbildungen unabhängig.

§ 6 Über die Existenz analytischer Mengen auf dem Rand der homogenen beschränkten Gebiete im C^n.

6-1. Es sei X ein komplexer Raum und $G \subset X$ ein Gebiet. $\mathfrak{H}$ bezeichne die Gruppe der Holomorphismen von G, d.h. der biholomorphen Abbildungen von G auf sich. G heißt symmetrisch in bezug auf $x_0 \in G$, wenn ein $\Phi \in \mathfrak{H}$ mit $\Phi^2 = I$ (I identische Abbildung von G) existiert, derart daß x_0 ein isolierter Fixpunkt von Φ ist. Wenn G symmetrisch in bezug auf alle $x \in G$ ist, so nennt man G symmetrisch schlechthin.
Wirkt G transitiv auf G, d.h. existiert zu jedem Paar von Punkten x_1 und x_2 aus G ein $\Phi \in \mathfrak{H}$ mit $\Phi(x_1) = x_2$, so heißt G ein homogenes Gebiet.

6-2. Homogene Gebiete in C^n sind zuerst von E.Cartan[23] untersucht worden. Er konnte beweisen, daß jedes homogene beschränkte Gebiet in C^n symmetrisch, und, wenn reduzibel, als direktes Produkt von irreduziblen homogenen Gebieten darstellbar ist. Außerdem gelang es ihm, ein vollständiges System von Repräsentanten für die irreduziblen homogenen Gebiete aufzustellen. Mit Ausnahme von zwei speziellen Fällen, die für die Dimensionen n=16 und n=27 vorkommen, lassen sich die Repräsentanten in vier Typen einteilen.
Wir untersuchen in der Folge die Frage der Existenz analytischer Mengen auf dem Rand eines beschränkten homogenen irreduziblen Gebietes. Dafür benützen wir das von C.L.Siegel[24] angegebene System von Repräsentanten für die oben erwähnten vier Typen.

Folgende Bezeichnungen werden verwendet: Ist $A=(a_{ik})$ irgendeine Matrix, so bezeichnen A', $\overline{A}$, $\widetilde{A} = \overline{A}'$ die transponierte von A bzw. die zu A konjugierte bzw. die zu A assoziierte Matrix. Ist A eine quadratische reguläre Matrix, so ist A^{-1} ihre Inverse. E_q bezeichnet die q×q-reihige Einheitsmatrix und O ist das Symbol für alle Nullmatrizen.

23) E. Cartan (5).
24) C.L.Siegel (22), (23), Siehe auch L.K. Hua (14).

6-3. Irreduzible homogene Gebiete von Typus I

$n=p.q$ (p und $q \leq p$ natürliche Zahlen) sei die Dimension des Raumes, z_{ik} $i = 1,\ldots,p$, $k = 1,\ldots,q$ die Koordinaten in C^n und $Z:=(z_{ik})$.

Das Gebiet G sei durch $H(Z):=E_q - Z'\overline{Z} > 0$ definiert, d.h. bestehe aus allen Punkten $Z \in C^n$, für die die hermitische Matrix $H(Z)$ positiv definit ist. Es läßt sich ohne Schwierigkeiten zeigen, daß G tatsächlich beschränkt ist.
Nach C.L. Siegel besteht die Gruppe $\mathfrak{H}$ der Holomorphismen von G aus gebrochenen linearen Transformationen

$$\Phi : Z \to W = (AZ+B)\ (CZ+D)^{-1}$$

wobei A, B, C und D konstante $p\times p$-, $p\times q$-, $q\times p$- und $q\times q$-reihige Matrizen sind, die folgende Bedingungen erfüllen:

$\alpha)$
$$\begin{aligned} A'\overline{A} - C'\overline{C} &= E_p \\ A'\overline{B} - C'\overline{D} &= 0 \\ D'\overline{D} - B'\overline{B} &= E_q \end{aligned}$$

6-4. Wir beweisen nun den

Satz 11: $Z_0 \in C^n$ ist genau dann ein Randpunkt von G, wenn $H(Z_0)$ positiv semidefinit ist.

Es sei U eine $q\times 1$-reihige Matrix mit konstanten Elementen. Ist $U'H(Z)\overline{U} < 0$ für $Z=Z^*$, so gibt es eine Umgebung von Z^*, in der die Ungleichung gilt. Z^* ist infolgedessen nicht Häufungspunkt von G. Für $Z_0 \in \partial G$ ist deshalb $U'H(Z)\overline{U} \geq 0$.
Umgekehrt sei $H(Z_0)$ positiv definit. Um zu zeigen, daß Z_0 ein Randpunkt von G ist, beweisen wir, daß alle Punkte der halboffenen Strecke $Z = tZ_0$ $(0 \leq t < 1)$ in G liegen. Für beliebiges U ist $U'H(Z_0)\ \overline{U} \geq 0$ und $U'\ Z_0'\ \overline{Z}_0\overline{U} \geq 0$. Daher gilt auf der erwähnten Strecke:

$$U'\ (H(Z))\overline{U} = U'\ (E_q - t^2 Z_0'\ \overline{Z}_0)\ \overline{U} = U'\ (H(Z_0))\ \overline{U} + (1-t^2) \cdot U'\ (H(Z_0)\overline{U} \geq 0$$

Die Gleichung $U'\,(H(Z))\,\overline{U} = 0$ ist zu folgenden äquivalent:

$$U'\,(Eq - Z_o'\,\overline{Z}_o)\,\overline{U} = 0$$
$$U'\,Z_o'\,\overline{Z}_o\,\overline{U} = 0$$

Aus diesen Gleichungen folgt aber $U'\overline{U} = 0$ oder $U = 0$. Dies beweist die positive Definitheit von $H(Z)$ auf der angegebenen Strecke.

Satz 12: Ist $Z \to W=(AZ+B)\,(CZ+D)^{-1}$ ein Holomorphismus von G, so ist $(CZ+D)'.\,(\overline{CZ+D})$ in allen Punkten von $\overline{G}$ positiv definit.

Wir bemerken zuerst, daß, wenn die Bedingungen α) erfüllt sind, $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ eine reguläre Matrix mit der Inversen $\begin{pmatrix} \tilde{A} & -\tilde{C} \\ -\tilde{B} & \tilde{D} \end{pmatrix}$ ist.

Zum Beweis des Satzes: Aus α) folgt:

ß) $(CZ+D)'(\overline{CZ+D}) = (AZ+B)'(\overline{AZ+B}) + E_q - Z'\overline{Z}$.

Die hermitischen Formen $U'(CZ+D)'(\overline{CZ+D})\overline{U}$ und $U'(AZ+B)'.\,.(\overline{AZ+B})\overline{U}$ nehmen keine negativen Werte an. Dasselbe gilt für $U'(E_q-Z'\overline{Z})\overline{U}$, wenn $Z \in \overline{G}$. Deshalb, wenn $Z \in \overline{G}$ und $U'(CZ+D)'(\overline{CZ+D})\overline{U} = 0$, ist auch $U'(AZ+B)'(\overline{AZ+B})\overline{U} = 0$. Diese Gleichungen sind aber zu $(CZ+D)U = 0$ und $(AZ+B)U=0$ oder zu $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} Z \\ E_q \end{pmatrix}.U = 0$ äquivalent. Wegen der Regularität von $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ ist die letzte Gleichung genau dann erfüllt, wenn $U = 0$. Daraus folgt die Behauptung.

Satz 13: Jeder Holomorphismus von G läßt sich zu einer biholomorphen Abbildung zwischen zwei Umgebungen von $\overline{G}$ fortsetzen.

Sei $\mathfrak{F}: Z \to W=(AZ+B)(CZ+D)^{-1}$ ein Holomorphismus von G. Durch dieselbe Zuordnung läßt sich $\mathfrak{F}$ zu einer holomorphen Abbildung $\mathfrak{F}': V \to C^n$ von $V:=\{Z:(CZ+D)'(\overline{CZ+D}) > 0\}$ fortsetzen, weil $CZ+D$ in V regulär ist. Die Inverse von $\mathfrak{F}$ ist $\mathfrak{F}^{-1}: W \to Z=(\tilde{A}W-\tilde{C})(-\tilde{B}W+\tilde{D})^{-1}$, wie man leicht kontrolliert. $\mathfrak{F}^{-1}$ läßt sich entsprechend auf $V':=\{W:(-\tilde{B}W+\tilde{D})'(-\overline{\tilde{B}W+\tilde{D}}) > 0\}$

fortsetzen. $\mathfrak{P}'$ bildet aber V auf V' ab, denn es ist:
$-\tilde{B}W+\tilde{D}=(-\tilde{B}(AZ+B)+\tilde{D}(CZ+D))(CZ+D)^{-1} = (CZ+D)^{-1}$.
$\hat{\mathfrak{P}} := \mathfrak{P}' | V \to V'$ ist die gesuchte Abbildung, weil nach Satz 12 $\overline{G}$ in V und V' liegt.

5. Wir nennen zwei Punkte Z_1 und Z_2 aus ∂G äquivalent (in bezug auf $\mathfrak{H}$) wenn ein $\mathfrak{P} \in \mathfrak{H}$ existiert, derart daß $\hat{\mathfrak{P}}(Z_1)=Z_2$, wobei $\hat{\mathfrak{P}}$ die Fortsetzung von $\mathfrak{P}$ im Sinne des letzten Satzes bedeutet.
Ist q-s (s=1,...,q) der Rang von H(Z) in $Z_0 \in \partial G$, so nennen wir Z_0 Randpunkt der Ordnung s.

Satz 14: Auf dem Rand von G liegen Punkte aller möglichen Ordnungen s=1,...,q
In der Tat: Mit $Z_0=\begin{pmatrix} E_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ besitzt $H(Z_0)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{q-s} \end{pmatrix}$ den Rang q-s (s = 1,...,q).

Satz 15: Zwei Randpunkte sind genau dann äquivalent, wenn sie dieselbe Ordnung besitzen.
Es seien Z_0 und W_0 äquivalente Randpunkte und $\mathfrak{P}$ ein Holomorphismus, der Z_0 in W_0 abbildet. Aus $W_0=(AZ_0+B)(CZ_0+D)^{-1}$ folgt $(CZ_0+D)'W_0'\overline{W}_0(\overline{CZ_0+D})=(AZ_0+B)'(\overline{AZ_0+B})$ und wegen ß:

$$(CZ_0+D)'(E_q-W_0'\overline{W}_0)(\overline{CZ_0+D}) = E_q-Z_0'\overline{Z}_0$$

Da CZ_0+D regulär ist, besitzen W_0 und Z_0 dieselbe Ordnung.
Um den Satz in der umgekehrten Richtung zu beweisen, setzen wir in $\mathfrak{P}$ und in den Bedingungen α) : $BD^{-1} = S$. Dann läßt sich $\mathfrak{P}$ in der Gestalt:

$$\Phi : Z \to W=(AZ+SD)(\tilde{S}AZ+D)^{-1}$$

schreiben, wobei A, D und S die Bedingungen:

$$\text{I)} \quad A'(E_p-\overline{S}S')\overline{A} = E_p$$

$$\text{II)} \quad D'(E_q-S'\overline{S})\overline{D} = E_q$$

erfüllen. Damit $\Phi(Z_0)=W_0$, muß noch $W_0(\tilde{S}AZ_0+D) = AZ_0+SD$ oder

$$\text{III)} \quad (W_0-S)D=(E_p-W_0\tilde{S})AZ_0$$

sein.

Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $Z_o=\begin{pmatrix} E_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und W_o irgendein Randpunkt der Ordnung s ist.

Beweis: Es sei $T=(T_1,T_2)$ eine reguläre $q\times q$-reihige Matrix derart, daß

$$\text{IV)} \quad T'(E_q-W_o'\overline{W}_o)\,\overline{T} = H(Z_o) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{q-s} \end{pmatrix}$$

Diese Gleichung ist zu folgenden äquivalent:

$$\text{IV}_1) \quad T_1'(E_q-W_o'\overline{W}_o)\overline{T}_1 = 0$$

$$\text{IV}_2) \quad T_1'(E_q-W_o'\overline{W}_o)\overline{T}_2 = 0$$

$$\text{IV}_3) \quad T_2'(E_q-W_o'\overline{W}_o)\overline{T}_2 = E_{q-s}$$

Um A, D und S zu konstruieren, die die Bedingungen I, II, III erfüllen, setzen wir $A = (A_1,A_2)$, $D = (D_1,D_2)$, wobei A_1 und D_1 die Teilmatrix der ersten s Spalten von A bzw. von D ist.

Wir benützen folgendes Lemma, dessen Beweis unten geführt wird:

Lemma: Erfüllt eine $q\times q$-reihige reguläre Matrix $T = (T_1,T_2)$ die Bedingung IV, so gibt es eine $p\times q$-reihige Matrix S mit folgenden Eigenschaften:

a) $(W_o-S)T_2=0$

b) (W_o-S) besitzt den Rang s

c) $E_q-S'\overline{S} > 0$, oder was dasselbe bedeutet: $E_p-\overline{S}S' > 0$. *)

Wir wählen eine solche Matrix S. Aus $(W_o-S)T=((W_o-S)T_1,0)$ und b) folgt wegen der Regularität von T, daß $(W_o-S)T_1$ den Rang s besitzt. Deshalb und wegen c) ist

$$K: = ((W_o-S)T_1)'(E_p-\overline{S}S')\overline{(W_o-S)T_1}$$

eine $s\times s$-reihige positivdefinite hermitische Matrix.

*) Siehe C.L.Siegel (23) Lemma 13.

Sei U eine sxs-reihige Matrix mit:

1) $U'K\overline{U} = E_s$.

Wir bestimmen A_1, D_1 und D_2 durch die Gleichungen:

2) $(E_p - S\tilde{S})A_1 = (W_o - S)T_1U$

3) $\tilde{S}A_1 + D_1 = T_1U$

4) $D_2 = T_2$.

A_2^o sei eine $p\times(p-s)$-reihige Matrix mit dem Rang p-s, derart daß $A_1'(E_p - \overline{S}S')\overline{A}_2^o = 0$. Eine solche Matrix A_2^o existiert, weil $A_1'(E_p - \overline{S}S')$ wegen 2) den Rang s besitzt. Dann ist $A_2^{o\prime}(E_p - \overline{S}S')\overline{A}_2^o$ eine positiv definite Matrix. Wir wählen eine Matrix V mit

5) $V'\, A_2^{o\prime}\,(E_p - \overline{S}S')\overline{A}_2^o\,\overline{V} = E_{p-s}$

und setzen $A_2 := A_2^oV$.

Wir zeigen jetzt, daß die auf diese Weise gewählten Matrizen $S, A := (A_1, A_2)$ und $D := (D_1, D_2)$ die Bedingungen I, II und III erfüllen:

Wegen 2) und 1) gilt: $A_1'(E_p - \overline{S}S')\overline{A}_1 = E_s$. Aus 5) folgt $A_1'(E_p - \overline{S}S')\overline{A}_2 = 0$ bzw. $A_2'(E_p - \overline{S}S')\overline{A}_2 = E_{p-s}$. Deswegen gilt $A'(E_p - \overline{S}S')\overline{A} = E_p$.

Aus 2) und 3) folgt $(E_p - W_o\tilde{S})\,A_1 = (E_p - \overline{S}S)A_1 - (W_o - S)\tilde{S}A_1 = (W_o - S)\cdot(T_1U - \tilde{S}A_1) = (W_o - S)D_1$. Wegen 4) und b) ist: $(W_o - S)D_2 = 0$. Damit ist $(W_o - S)D = (E_p - W_o\tilde{S})AZ_o$, denn $AZ_o = (A_1, 0)$. Die Bedingung III ist damit erfüllt.

Wegen IV_3 und $W_oD_2 = SD_2$ gilt: $D_2'(E_q - S'\overline{S})\overline{D}_2 = T_2'(E_q - W_o'\overline{W}_o)\overline{T}_2 = E_{q-s}$. Aus 3) und IV_2 folgt dann $D_1'(E_q - S'\overline{S})\overline{D}_1 = U'T_1'(E_q - W_o'\overline{W}_o)\overline{T}_2 = 0$ und schließlich aus 3) und $W_o(\tilde{S}A_1 + D_1) = A_1 + SD_1$ folgt $D_1'(E_q - S'\overline{S})\overline{D}_1 = A_1'(E_p - \overline{S}S')\overline{A}_1 = E_s$. Damit gilt II:

Zum Beweis des Lemmas:

Wir setzen $W_o-S=X$ und $T^{-1}=\binom{L}{M}$, wobei L die Teilmatrix der ersten s Zeilen bezeichnet. Wegen $T^{-1}T=E_q$ ist $LT_2=0$. Deswegen, wenn B eine reguläre sxs-reihige Matrix bezeichnet, sind mit $X=\binom{BL}{0}$ (pxq-reihig) a) und b) erfüllt.

Wir bestimmen jetzt B so daß c) gilt: Es sei $W_oT=\binom{H_1*}{H_2*}$, wobei H_1 eine sxs-reihige reguläre Matrix ist[25]. Dann ist wegen $XT=\binom{BL}{0}(T_1,T_2)=\binom{B\ 0}{0\ 0}$,

$$T'(E_q-S'\overline{S})\overline{T}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & E_{q-s}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}H_1'\overline{B} & 0\\ H_2'\overline{B} & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}B'\overline{H}_1 & B'\overline{H}_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}B'\overline{B} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}H_1'\overline{B}+B'\overline{H}_1-B'\overline{B} & B'\overline{H}_2\\ H_2'\overline{B} & E_{q-s}\end{pmatrix}.$$

Dieser Matrix entspricht die hermitische Form

$$K=U_1'(H_1'\overline{B}+B'\overline{H}_1-B'\overline{B})\overline{U}_1+U_1'B'\overline{H}_2\overline{U}_2+U_2'H_2'\overline{B}\overline{U}_1+U_2'\overline{U}_2=$$

$$=(U_2'+U_1'B'\overline{H}_2)(\overline{U}_2+H_2'\overline{B}\overline{U}_1)+U_1'(H_1'\overline{B}+B'\overline{H}_1+B'\overline{B}-B'\overline{H}_2H_2'\overline{B})\overline{U}_1$$

wobei $U=\binom{U}{U_2}1$ der Spaltenvektor der Variablen und U_1 der der ersten s Variablen ist.

Wählt man B so, daß

$$H_1'\overline{B}+B'\overline{H}_1-B'\overline{B}-B'\overline{H}_2H_2'\overline{B}=B'(B'^{-1}H_1'+\overline{H}_1\overline{B}^{-1}-Es-\overline{H}_2H_2')\overline{B}$$

positiv definit wird, so wird K=0 genau dann, wenn $U_1=0$ und $U_2=0$ und damit wird K positiv definit. Dafür genügt es zu setzen: $H_1B^{-1}=E_s+H_2H_2$ oder $B=H_1(E_s+H_2H_2)^{-1}$.

---

25) Wegen IV gilt $T_1=W_o\tilde{W}_oT_1$. Deswegen besitzt W_oT_1, wie T_1, den Rang s und enthält eine sxs-reihige reguläre Untermatrix. Da eine gewisse Freiheit in der Konstruktion von X besteht, dürfen wir o.E.d.A. annehmen, daß H_1 regulär ist.

6-6. Satz 16: Ist $Z_0 \in \partial G$ ein Randpunkt der Ordnung s (s=1,...,q), so liegt auf ∂G eine Z_0 enthaltende lokalanalytische Menge des C^n mit der komplexen Dimension (p-s)·(q-s).

Wegen Satz 15 genügt es, die Existenz solcher Mengen festzustellen, wenn $Z_0=\begin{pmatrix} E_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Setzt man $Z=\begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_3 & Z_4 \end{pmatrix}$, wobei Z_1 eine s × s-reihige Matrix bezeichnet, so definieren die Gleichungen:

$$Z_1 = E_s , \quad Z_2 = 0 , \quad Z_3 = 0$$

eine (p-s)(q-s)-dimensionale analytische Ebene, die Z_0 enthält. Die Punkte dieser Ebene, die in der Umgebung $U:=\{ Z:Eq-_sZ_4'\overline{Z}_4 > 0\}$ liegen, gehören alle zu ∂G, denn es gilt:

$$Eq-Z'\overline{Z}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_q-Z_4'\overline{Z}_4 \end{pmatrix}$$

und damit ist $Eq-Z'\overline{Z}$ in U positiv semidefinit.

6-7. Irreduzible homogene Gebiete von Typus II[26)]

Die Dimension des Zahlenraumes C^n sei $n=\frac{p(p+1)}{2}$ mit $p \geq 2$. Bezeichnen z_{ik} i,k=1,...,p (i≠k) die Koordinaten in C^n. Wir setzen $z_{ik}=z_{ki}$ falls i > k und $Z:=(z_{ik})$ i,k=1,...,p. Die Punkte des C^n werden als symmetrische Matrizen Z aufgefaßt.

G sei durch die Gleichung

$$E_p-Z'\overline{Z} > 0 \qquad (Z'=Z)$$

definiert.

---

26) Typus III bei C.L.Siegel. (23)

Die Gruppe $\mathfrak{H}_1$ der Holomorphismen von G ist eine Untergruppe der Gruppe $\mathfrak{H}$, die im Fall $p=q$ in dem ersten Typus vorkommt. $\mathfrak{H}_1$ besteht aus allen Transformationen:

$\Phi : Z \to W=(AZ+B)(CZ+D)^{-1}$

die außer α) die Bedingungen: $D = \overline{A}$ und $C = \overline{B}$ erfüllen.

Die Sätze 11, 12, 13, 14 sind auch in Typus II gültig.

Satz 17: Auf dem Rand eines homogenen irreduziblen Gebietes von Typus II, liegen lokalanalytische Mengen aller Dimensionen $\frac{(p-s)(p-s+1)}{2}$ $s = 1,\ldots,p.$

In unserem Fall besitzt die analytische Ebene:

$Z_1 = E_s$, $Z_2 = 0$

die Dimension $\frac{(p-s)(p-s+1)}{2}$. (Vgl.Bezeichnungen im Satz 16).

6-8. Irreduzible homogene Gebiete von Typus III[27)]

Sei $n = \frac{p(p-1)}{2}$ $(p \geq 4)$ und Z eine schief-symmetrische Matrix: $Z:=(z_{ik})$, wobei z_{ik} für $k=2,\ldots,p$ $i=1,\ldots,k-1$ die Koordinaten in C^n bezeichnen.

G wird durch die Ungleichung $E_p - Z'\overline{Z} > 0$ definiert.

Die Gruppe der Holomorphismen von G besteht aus den Transformationen

$\Phi : Z \to W=(AZ+B)(CZ+D)^{-1}$

wobei die quadratischen Matrizen A,B,C,D außer α) die Bedingungen: $D=-\overline{A}$ $C=-\overline{B}$ erfüllen.

Die Sätze 11, 12, 13 sind auch für Typus III gültig.

27) Typus II bei C.L.Siegel (23)

Satz 18: Auf dem Rand eines homogenen irreduziblen Gebietes von Typus III liegen Punkte aller Ordnungen $s=2,4,\ldots \leq p$.

Wir setzen

$$H_s=\begin{pmatrix} & & & -1 \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ 1 & & & \end{pmatrix} \quad \text{(s x s-reihig)},$$

und $Z_o=\begin{pmatrix} H_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt $H(Z_o)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{p-s} \end{pmatrix}$.

Satz 19: Auf dem Rand eines homogenen irreduziblen Gebietes von Typus III liegen lokalanalytische Mengen aller Dimensionen $\frac{(p-s)(p-s-1)}{2}$, $(s=2,4,\ldots \leq p)$.

Beweis: (wie bei Satz 16). ∂G enthält ein Stück der analytischen Ebene $Z_1=H_s \quad Z_2=0$. Die Dimension dieser Ebene ist $\frac{(p-s)(p-s-1)}{2}$.

6-8. Die irreduziblen homogenen Gebiete von Typus IV

Es sei $p\geq 5$ die Dimension des Zahlenraumes C^p. G wird durch die Ungleichungen:

$$|z_1|^2+\ldots|z_p|^2<\frac{1}{2}\left\{1+|z_1^2+\ldots+z_p^2|^2\right\}<1$$

definiert.

Wir setzen $L:=z_1^2+\ldots+z_p^2$ und $M:=z_1\bar{z}_1+\ldots+z_p\bar{z}_p$. Dann werden die letzten Ungleichungen zu folgenden äquivalent:

$$\varphi: =1-L\bar{L}>0$$
$$\psi: =1+L\bar{L}-2M>0$$

$\varphi=0$ ist eine analytische Hyperfläche.

Der Durchschnitt der Hyperflächen $\varphi=0$ und $\psi=0$ wird durch das System: $\varphi=0 \quad M=1$ gegeben. Daraus folgt:

Satz 20: In der Umgebung eines Randpunktes von G, die auf $\varphi=0$, aber nicht auf dem Rand der Hyperkugel $M<1$ liegt, ist ∂G eine analytische Hyperfläche.

Vergleicht man die Dimensionen der analytischen Mengen, die auf dem Rand eines homogenen irreduziblen Gebietes liegen, mit den Einschränkungen, die über p und q für die angegebenen Typen gemacht worden sind, so stellen wir fest, daß mit Ausnahme der Hyperkugel (Typus I mit $q=1$), alle Gebiete auf dem Rand positiv-dimensionale lokalanalytische Mengen enthalten.

Satz 21: Der einzige Repräsentant von homogenen irreduziblen Gebieten mit einfachem Rand ist die Hyperkugel.

Literaturverzeichnis

(1) H. Behnke und K. Stein: Modifikation komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannscher Gebiete. Math.Ann. 124, 1-16 (1951).

(2) H. Behnke und P. Thullen: Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Ergeb.d.Math.3 (1934). Nachdruck Chelsea Publ.

(3) N. Bourbaki: Topologie Genérale. Chap. I, II. Paris (1953).

(4) C. Caratheodory: Über die Abbildungen, die durch Systeme von analytischen Funktionen von mehreren Veränderlichen erzeugt werden. Math.Z.34, 758-792 (1934).

(5) E. Cartan: Sur les domaines bornés homogènes de l'espace de n variables complexes. Abh.Math.Sem.Hamb.2 (116-162) (1936).

(6) H. Cartan: Sur les fonctions de n variables complexes. Les transformations du produit topologique de deux domaines. Bull.Soc. Math.de France 64, 1-12 (1936).

(7) H. Cartan: Sur une extension d'un théorème de Radó. Math.Ann. 125, 49-50 (1952).

(8) H. Cartan: Seminaire E.N.S. 1951/52.

(9) J.V.Gonçalves: Curso de Algebra Superior, II. Band, Lisboa, 1950.

(10) H. Grauert: Charakterisierung der holomorph vollständigen komplexen Räume. Math.Ann. 129, 274-296 (1955).

(11) H. Grauert: On Levi's problem and the imbebing of real analytic manifolds. Ann.of Math. 68, 460-472 (1958).

(12) H. Grauert und R.Remmert: Plurisubharmonische Funktionen in komplexen Räumen. Math.Z. 65, 175-194 (1956).

(13) H. Grauert und R. Remmert: Komplexe Räume. Math.Ann. 136, 245-318 (1958).

(14) L.K. Hua: On the theory of automorphic functions of a matrix variable. Amer.J.Math. 66, 470-488 and 531-563 (1944).

(15) W. Hurewics und H. Wallmann: Dimension Theory. Princeton Univ.Press (1948).

(16) J. Krzoska: Über die natürlichen Grenzen analytischer Funktionen mehrerer Veränderlicher. Diss.Univ. Greifswald (1933).

(17) T. Radó: Über eine nicht fortsetzbare Mannigfaltigkeit. Math.Z. 20, 1-6 (1924).

(18) R. Remmert: Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume. Math.Ann. 133, 328-370 (1957).

(19) R. Remmert und K. Stein: Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen. Math.Ann. 126, 263-306 (1953).

(20) R. Remmert und K. Stein: Eigentliche holomorphe Abbildungen. Math.Z. 73, 159-189 (1960).

(21) F. Sommer: Komplex-analytische Blätterung reeller Mannigfaltigkeiten in C^n. Math.Ann. 136, 111-133 (1958).

(22) C.L. Siegel: Symplectic Geometrie. Amer.J.of Math. 65, 1-86 (1943).

(23) C.L. Siegel: Analytic functions of several complex variables.(Lectures). Princeton 1954.

(24) K. Stein: Analytische Zerlegungen komplexer Räume. Math.Ann. 132, 63-93 (1956).

(25) K. Stein: Die Existenz komplexer Basen zu holomorphen Abbildungen. Math.Ann. 136, 1-8 (1958).

Lebenslauf

Am 21. Dezember 1924 wurde ich als Sohn des Schullehrers José Severino Osório und seiner Ehefrau Maria Belmira, geb. Silveira, geboren. Ich gehöre zur römisch-katholischen Kirche.
Von 1930 bis 1934 besuchte ich die Volksschule, von 1934 bis 1941 das "Liceu" in Goa und absolvierte dort die Reifeprüfung.
1942 kam ich nach Portugal und studierte Mathematik an der Universität Lissabon. 1946 beendete ich dieses Studium mit Erlangung des Diploms "Licenciado em Ciêneias Matematicas". Von 1947 bis 1949 habe ich nach einer achtmonatigen Ausbildung als Meteorologe im "Servico Meteorologico Nacional" (Portugal) gearbeitet. Von 1949 bis 1955 war ich als 2. Assistent für höhere Mathematik bei Prof. J.Vicente Goncalves an der Universität Lissabon beschäftigt. Von 1955 bis 1956 erhielt ich ein Stipendium des "Instituto de Alta Cultura" (Portugal) um an dem Seminar von Prof. Dr.A.de Almeida e Costa teilzunehmen. 1956 kam ich nach Deutschland und seitdem besuchte ich in München Vorlesungen bei den Professoren G.Aumann, M.Kneser, E.Lammel, O.Perron, H.Richter, W.Stegmüller, K.Stein, H.Tietze und bei den Dozenten H.Röhrl, E.Thoma.